Reelle Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Alfred Müller, Coburg

© AleksandarGeorgiev/E+/Getty Images

Dieser Beitrag enthält Lernerfolgskontrollen im Bereich der Exponential- und Logarithmusfunktionen. Ziel ist es, das Wissen der Schüler durch vorgefertigte Tests zu prüfen.

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © AleksandarGeorgiev/E+/Getty Images
Lektorat: Christin Bossert, Rastatt, Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Reelle Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg

Die Schüler lernen:

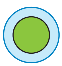
mit Exponential- und Logarithmusfunktionen souverän zu rechnen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Zwei Funktionenscharen – Test 1	M 1	Ab, LEK
Eine bemerkenswerte Funktionenschar – Test 2	M 2	Ab, LEK
Umkehrfunktion – Test 3	M 3	LEK
Fläche und Wachstum – Test 4	M 4	Ab, LEK
Definitionslücke – Test 5	M 5	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

M 1 Zwei Funktionenscharen – Test 1

1. Gegeben sind die in $D = \mathbb{R}^+$ definierten Funktionenscharen f_a und g_a durch ihre Gleichungen $f_a(x) = \frac{\ln(x)+a}{x}$ und $g_a(x) = \frac{a \cdot \ln(x)+1}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Graphen G_a und $G_a{}'$.
   a) Bestimmen Sie für $a < 0$ die Grenzwerte der Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to +0$. 4
   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen G_a und $G_a{}'$ mit der x-Achse. Für welchen Wert von a stimmen diese überein? 3
   c) Für welchen Wert von a stimmen die Graphen G_a und $G_a{}'$ überein? Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S in Abhängigkeit von a. 3

2.
   a) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a und $G_a{}'$ jeweils genau einen Extrempunkt E besitzen und bestimmen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a. 6
   b) Untersuchen Sie für $a = -1$ die Art der Extremwerte ohne Verwendung der 2. Ableitung. 4

3.
   a) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a und $G_a{}'$ für $a = -1$ symmetrisch zur x-Achse liegen. Zeichnen Sie dann diese beiden Graphen für alle $x \in [0;\ 9]$. Verwenden Sie 1 LE = 2 cm auf der x-Achse und 1 LE = 3 cm auf der y-Achse. 6
   b) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln(x)$ eine Stammfunktion zur Funktion f_{-1} ist. Bestimmen Sie dann für $a = -1$ den Inhalt der Fläche, den die Graphen G_{-1} und G'_{-1} zwischen der Nullstelle und den Extremwerten miteinander einschließen. 6

4.
   a) Für welchen Wert von a berühren sich die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 mit $h_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 +$ [illegible] und $h_2(x) = \frac{a}{x^2}$ in zwei Punkten A und B? Bestimmen Sie deren Koordinaten. 5
   b) Zeigen Sie, dass gilt: $\int (x\cos(x) + a)\ dx = \cos(x) + x\sin(x) + ax + c$. 3

40

Arbeitszeit: 55 Minuten

M 2 Eine bemerkenswerte Funktionenschar – Test 2

1. Gegeben ist die in $D_f = \mathbb{R}^+$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = ax\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2$, $a \in \mathbb{R}^+$ mit Graphen G_a.
   a) Bestimmen Sie das Verhalten von f_a an den Grenzen des Definitionsbereichs. Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a den Graphen G_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse sowie auf Extrem- und Wendepunkte. 10
   b) Zeichnen Sie für $a = 1$ den Graphen G_1 der Funktion f_1 mit $f_1(x) = x\,(\ln(x))^2$ im Intervall $I =]0;3]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und des Grenzwerts der 1. Ableitung f_1' für $x \to +0$.
   Verwenden Sie $1\text{ LE} = 4\text{ cm}$. 5
   c) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(0 < u < 1)$ schneidet die x-Achse im Punkt A und den in Aufgabe 1b) für $a = 1$ gezeichneten Graphen G_1 im Punkt B. Bestimmen Sie u so, dass das Dreieck OAB maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie für diesen Wert von u den maximalen Flächeninhalt A_{max} an. 5
   d) Bestimmen Sie in der Funktionsgleichung
   $F(x) = cx^2(\ln x)^2 - cx^2(\ln x + d)$, $D_F = \mathbb{R}^+$
   die Koeffizienten c und d so, dass F eine Stammfunktion zur Funktion f_1 wird. 5

2.
   a) Die Funktion $g(x) = x \cdot (\ln|x|)^2$ hat die maximale Definitionsmenge D_g und den Graphen G_g. Geben Sie D_g an und beschreiben Sie den Graphen G_g. 3
   b) g^* sei eine Fortsetzung der Funktion g auf $D_{g*} = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph G_{g*} mit der x-Achse, $x \in [-1;1]$, einschließt. 3

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) = \dfrac{(x^2+x)(x^2+x+5)+6}{(x^2+x)(x^2+x+6)+9}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist. 7

40

Arbeitszeit: 60 Minuten

M 3 Umkehrfunktion – Test 3

1. Gegeben ist die Funktion $f(x)=\ln(e-x)$ mit $D=D_{max}$ und Graphen G.
   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und zeigen Sie, dass die Funktion f in D streng monoton abnehmend ist. 4
   b) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Gleichung der Tangente t im Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Gleichung der Asymptote. 5
   c) Zeichnen Sie den Graphen G und die Tangente t für alle $x \in [-3; e[$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. 5
   d) Begründen Sie, dass die Funktion f in D umkehrbar ist, und bestimmen Sie die Gleichung $y=f^{-1}(x)$ sowie deren Ableitung. 6
   e) Skizzieren Sie den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} in das oben angelegte Koordinatensystem. 3

2.
   a) Bestimmen Sie jeweils $y = g(x)$:
      (1) $y' = \frac{1}{x^2}$ (2) $y' = \frac{1}{x}$
      (3) $y' = 1$ (4) $y' = x$ 4
   b) Bringen Sie auf eine parameterfreie Form: $x =$ [illegible] $3a \wedge y=1+2a$ 3

3. Der Bestand einer Bakterienkultur zur Zeit x (in Stunden) wird durch die Funktionsgleichung $h(x)=k \cdot e^{ax}$ beschrieben. Zur Zeit $x=0$ (Beginn der Beobachtung) befanden sich 2000 Bakterien in der Kultur, nach vier Stunden 2200.
   a) Bestimmen Sie die Parameter k und a. 4
   b) Wie viele Bakterien befinden sich nach 8 Stunden in der Kultur? 3
   c) Nach welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien? 3

40

Arbeitszeit: 50 Minuten

M 4 Fläche und Wachstum – Test 4

1. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a(x) = [\ln(x - a)]^2 - 1$ mit $a \in \mathbb{R}$, maximaler Definitionsmenge $D = D_{max}$ und Graphen G_a.
   a) Geben Sie die Definitionsmenge D_{max} sowie die Grenzwerte bei Annäherung an die Ränder von D an.
   b) Untersuchen Sie die Graphen G_a in Abhängigkeit von a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. 4
   c) Zeigen Sie, dass jeder Graph genau einen Tiefpunkt T besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. Geben Sie dann die Gleichung $y(x)$ derjenigen Kurve K an, auf der alle Tiefpunkte liegen, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt. 6
   d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W sowie die Gleichung der Wendetangente t_W. Was fällt Ihnen auf? 5
   e) Zeichnen Sie für $a = 0$ den Graphen G_0 sowie die Wendetangente t_W im Intervall $]0;\ 5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. 4
   f) Zeigen Sie, dass die Funktion F_0 mit $D_F = D$ und $F_0: x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + x$ eine Stammfunktion zur Funktion f_0 ist. 2
   g) Die gezeichneten Graphen G_0 und t_W sowie die x- und y-Achse schließen ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche. 4
   h) Begründen Sie, dass der Graph der Integralfunktion

   $$G(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{x} f_0(t)\,dt,\quad D_G = D \text{ bei } x = \frac{1}{e}$$

   die x-Achse berührt. Untersuchen Sie G auf weitere Nullstellen und beschreiben Sie gegebenenfalls ihre Lage. 3

2. Einzeller werden für wissenschaftliche Zwecke so vermehrt, dass sie einer Funktionsgleichung $y(x) = c \cdot e^{ax}$ genügen, wobei $y(x)$ den Bestand nach x Tagen angibt. Die Versuche beginnen mit 1000 Einzellern.
   a) Bestimmen Sie die Parameter a und c, wenn nach fünf Tagen 3000 Einzeller gezählt werden. 2
   b) Um wie viele Einzeller nimmt der Bestand zwischen dem 9. und 10. Tag zu? 3
   c) Nach einer bestimmten Zeit x_1 werden 50 % der Einzeller entnommen. Nach welcher Zeit hat sich der Bestand wieder wie vor der Entnahme aufgefüllt? 4

40

Arbeitszeit: 55 Minuten

M 5 Definitionslücke – Test 5

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln \frac{x^2}{a}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, Definitionsmenge $D_a = D_{max}$ und Graphen G_a.
   a) Alle Funktionen f_a sind für einen Wert $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert. Bestimmen Sie diesen Wert sowie das Verhalten von f_a bei Annäherung an diese Definitionslücke. Wie bezeichnet man eine solche Definitionslücke? 4
   b) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung $f_a{'}$ gilt: $f_a{'}(x) = \frac{1}{a}\left(2 + \ln \frac{x^2}{a}\right)$.
   c) Bestimmen Sie das Verhalten von $f_a{'}$ bei Annäherung an die nicht definierte Stelle $x = x_0$. 4
   d) Weisen Sie nach, dass für alle $d \neq 0$ gilt: $f_a(d) + f_a(-d) = 0$.
   Welche Folgerung kann man aus der Gültigkeit dieser Gleichung ziehen? 4
   e) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen G_a mit der x-Achse. 3
   f) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Hoch- und Tiefpunkte sowie auf Wendepunkte. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an. 7
   g) Alle Hochpunkte H liegen auf einer Kurve G_g, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt. Bestimmen Sie die Gleichung $g(x)$ dieser Kurve sowie ihre Definitionsmenge D_g. Zeigen Sie dann, dass die Tiefpunkte T auf einer Fortsetzung dieser Funktion liegen. 5
   h) Zeichnen Sie den zu $a = 1$ gehörenden Graphen G_1 im Intervall $I = [-1{,}5;\ 1{,}5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie 1 LE = 4 cm. 5

2.
   a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F_a(x) = \frac{x^2}{2a}\left(-1 + \ln \frac{x^2}{a}\right)$ mit $D_F = D_a$ eine Stammfunktion zur Funktion f_a ist. 3
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graph G_a mit der x-Achse einschließt. Was fällt Ihnen auf? 5

40

Arbeitszeit: [illegible]0 Minuten