Gebrochenrationale Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Alfred Müller, Coburg

© *Flying Colours Ltd/Digital Vision/Getty Images Plus*

Eine Rennstrecke zu meistern, ist so anspruchsvoll wie das Lösen gebrochenrationaler Funktionen, mit denen sich der Verlauf der Rennstrecke modellieren lässt. Dieser Beitrag enthält Lernerfolgskontrollen im Bereich der gebrochenrationalen Funktionen. Ziel ist es, das Wissen der Schüler durch vorgefertigte Tests zu prüfen.

VORANSICHT

RAABE,
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Flying Colours Ltd/Digital Vision/Getty Images Plus
Lektorat: Christin Bossert, Rastatt, Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

VORANSICHT

Gebrochenrationale Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg

M 1 Eine Schar von Funktionen – Test 1	**1**
M 2 Extrema, Asymptoten und Integral – Test 2	**2**
M 3 Wendepunkte und Stammfunktion – Test 3	**3**
M 4 Schiefe Asymptote, Flächeninhalt – Test 4	**4**
M 5 Symmetrie, Logarithmus – Test 5	**5**
Lösungen	**6**

© RAABE 2020

Die Schüler lernen:

den sicheren Umgang mit Funktionenscharen und Integralfunktionen. Über verschiedene Tests mit Punkteangaben können Sie den Wissensstand der Lernenden prüfen. In den Tests müssen sie unter anderem die maximalen Definitions- und Wertemengen, Asymptoten, Extremwerte und Flächenmaßzahlen in Abhängigkeit eines Parameters bestimmen.

VORANSICHT

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Eine Schar von Funktionen – Test 1	M 1	Ab, LEK
Extrema, Asymptoten und Integral – Test 2	M 2	Ab, LEK
Wendepunkte und Stammfunktion – Test 3	M 3	Ab, LEK
Schiefe Asymptote, Flächeninhalt – Test 4	M 4	Ab, LEK
Symmetrie, Logarithmus – Test 5	M 5	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

●	■	▲
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
★	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

M1	M2	M3	M4	M5
1a) ■	1a) ●	1 ●	1a) ●	1a) ■
1b) ■	1b) ●	2a) ■	1b) ●	1b) ●
1c) ■	1c) [illegible]	2b) ■	1c) ■	1c) ●
1d) ▲	1d) ●	2c) ●	2a) ●	1d) ●
1e) ●	2a) ●	2d) ●	2b) ■	2a) ●
2 ■	2b) ■	3a) ■	2c) ●	2b) ●
3a) ■		3b) ▲	2d) ■	2c) ●
3b) ▲		4a) ●	2e) ■	3a) ●
		4b) ■		3b) ●

© RAABE 2020

VORANSICHT

M 1 Eine Schar von Funktionen – Test 1

1. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung

$$f_a(x)=\frac{x^2-\left(1-a^2\right)x}{x-1},\quad a\in\mathbb{R}^+ \text{ mit den Graphen } G_a.$$

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_a der Funktionen f_a, die Schnittpunkte der Graphen G_a mit der x-Achse sowie die Gleichungen der Asymptoten. 6

   b) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt Z der Asymptoten das Symmetriezentrum aller Graphen G_a ist. 6

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extremwerte und zeigen Sie, dass alle Extremwerte auf der Kurve K mit $k(x) = x^2$ liegen. Welcher Punkt [illegible] der Kurve K ist kein Extremwert? 8

   d) Begründen Sie, dass keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt besitzt. Welche Wertemenge W_a haben die Funktionen f_a? Gibt es einen Wert für a, sodass $W_a = \mathbb{R}$ gilt? 5

   e) Zeichnen Sie den zu $a = 1$ gehörenden Graphen G_1 im Intervall $I=[-2;4]$. 4

2. Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche A, die der Graph G_a mit seiner schiefen Asymptote zwischen $x = 2$ und $x = 3$ einschließt. 5

3.

   a) Begründen Sie: Der Graph der Funktion g_a mit $g_a(x)=\frac{1}{f_a(x)}$ schneidet den Graphen G_1 in nur zwei Punkten. 3

   b) Für welchen Wert von a hat der Graph der Funktion g_a nur einen Extremwert? 3

Gesamt: 40

© RAABE 2020

VORANSICHT

M 2 Extrema, Asymptoten und Integral – Test 2

1. Es sei $f_a(x)=\dfrac{x+a}{(x-a)^2}$, $a\in\mathbb{R}^+$ mit maximaler Definitionsmenge D_a und Graphen G_a.

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_a sowie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen.

   b) Untersuchen Sie das Verhalten von f_a an den Rändern von D_a und geben Sie dann die Gleichungen aller Asymptoten an. 4

   c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Art und Lage des Extrempunktes von G_a sowie für die Kurve K, auf der sich der Extrempunkt bewegt, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt, die Gleichung $k(x)$ und deren Definitionsmenge D_k. 9

   d) Zeichnen Sie für $a = 1$ die Asymptoten sowie den Graphen G_1 anhand einer Wertetabelle im Intervall $I=[-4;4]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie: 1 LE = 2 cm. 5

2. Im Folgenden wird für $a = 1$ die Funktion f_1 mit der Gleichung $f_1(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ betrachtet.

   a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}$ für $x>1$ eine Stammfunktion von f_1 ist. 3

   b) Die Funktion $G(x)=\int_2^x f_1(t)\,dt$, $D_G = D'$ ist eine Integralfunktion zur Funktion f_1.

   - Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D' von G und untersuchen Sie die Stammfunktion G in D' auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. 3
   - Bestimmen Sie den Funktionswert $G(4)$ auf zwei Dezimalen. Interpretieren Sie dieses Ergebnis geometrisch. 3

Gesamt: 30

© RAABE 2020

VORANSICHT

M 3 Wendepunkte und Stammfunktion – Test 3

1. Gegeben ist die in $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ definierte Funktion f_a durch ihre Gleichung

$$f_a(x) = \frac{x^3 - 3a^2x - 2a^3}{(x-a)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und Graphen } G_a.$$

Für $a = 0$ ergibt sich der Sonderfall der Funktion f_0.
Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion. 3

In den Aufgaben 2–4 sei immer $a \in \mathbb{R}^+$:

2.
   a) Zeigen Sie, dass der Graph G_a die x-Achse im Punkt $N_1(-a|0)$ berührt. Berechnen Sie die weiteren Schnittpunkte des Graphen G_a mit den Koordinatenachsen. 5
   b) Zeigen Sie, dass der Funktionsterm f_a auch in der Form
   $$f_a(x) = x + 2a - \frac{4a^3}{(x-a)^2}$$
   dargestellt werden kann.
   Geben Sie dann die Gleichungen aller Asymptoten an. 6
   c) Untersuchen Sie den Graphen G_a auf Extremwerte nach Art und Lage sowie auf Wendepunkte. 6
   d) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für $a = 1$ im Intervall $I = [-3; 4]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. 5

3. Die Integralfunktion $F_a(x) = \int_{1,5a}^{x} f_a(t)\,dt$ sei gegeben. Die folgenden Teilaufgaben sind ohne Berechnung der Funktionsgleichung von F_a zu beantworten.
   a) Geben Sie die Definitionsmenge D_F an und begründen Sie, dass F_a genau einen Extremwert besitzt. Welcher Art ist dieser? 4
   b) F_a besitzt genau zwei Nullstellen (Nachweis nicht erforderlich). Beschreiben Sie ihre Lage. 3

4.
   a) Geben Sie die Menge aller Stammfunktionen G zur Funktion f_a an. 3
   b) Der Graph G_a von f_a schließt mit seiner schiefen Asymptote zwischen $x = 1,5a$ und $x = u$ ($u > 1,5a$) eine Fläche A_u ein. Berechnen Sie A_u und untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $A = \lim_{u \to \infty} A_u$ existiert. 5

Gesamt: 40

© RAABE 2020

VORANSICHT

M 4 Schiefe Asymptote, Flächeninhalt – Test 4

1. Gegeben ist die in $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = \dfrac{x^3 - a^3}{x^2 - 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Graphen G_a.

   a) Berechnen Sie für die Graphen G_a den Schnittpunkt mit der y-Achse und untersuchen Sie G_a in Abhängigkeit von a auf Schnittpunkte mit der x-Achse. 4

   b) Jeder der Graphen besitzt eine schiefe Asymptote. Bestimmen Sie ihre Gleichung sowie die Koordinaten ihres Schnittpunktes P_a mit dem Graphen G_a. 4

   c) Für $a = 2$ besitzt die Funktion f_2 eine stetige Fortsetzung $f_2{}^*$. Geben Sie eine Gleichung von $f_2{}^*$ an und bestimmen Sie die Grenzwerte von f_2 bei Annäherung an die nicht definierten Stellen. 4

2. Betrachtet wird jetzt für $a = 0$ die Funktion f_0 mit $f_0(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen G_0 auf Symmetrie und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an. 4

   b) Untersuchen Sie den Graphen G_0 auf Hoch- und Tiefpunkte sowie auf Wendepunkte. 9

   c) Zeichnen Sie den Graphen G_0 für alle $x \in [-5; 5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. 5

   d) Bestimmen Sie auf zwei Dezimalstellen genau den Inhalt derjenigen Fläche, die die Geraden $x = 3$ und $x = 5$, die schiefe Asymptote und der Graph G_0 miteinander einschließen. 5

   e) Geben Sie für die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f_0(t)\,dt$ die Definitionsmenge sowie eine integralfreie Darstellung an. 5

Gesamt: 40

© RAABE 2020

VORANSICHT

M 5 Symmetrie, Logarithmus – Test 5

1. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x^2 - a^2} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+ \text{ und Graphen } G_a.$$

a) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Definitionsmenge D_a sowie die Gleichungen aller Asymptoten an. Bestimmen Sie dazu das Verhalten der Funktion f_a an den Definitionslücken sowie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_a(x)$. 7

b) Untersuchen Sie den Graphen G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf Symmetrie. 4

c) Bestimmen Sie mithilfe der 1. Ableitung das Monotonieverhalten des Graphen G_a und schließen Sie daraus auf Art und Lage des Extremwertes. 8

d) Zeichnen Sie den Graphen G_2 für $a = 2$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Intervall $I = [-5; 5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. 6

2.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit der Gleichung
$G(x) = 2x + 2 \cdot \ln|x-2| - 2 \cdot \ln|x+2| + c$
die Menge aller Stammfunktionen zur Funktion f_2 für $a = 2$ ist. 5

b) Für welchen Wert von c stimmt die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_3^x f_2(t)\,dt$ mit einer der Stammfunktionen G überein? 5

c) Berechnen Sie dann auf zwei Dezimalen genau den Inhalt A derjenigen Fläche, den der Graph G_2 zwischen den Geraden $x = -1$ und $x = 1$ mit seiner waagrechten Asymptote einschließt. 5

3.

a) Zeigen Sie: Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind, dann gilt das auch für ihre Summenfunktion
$s(x) = f(x) + g(x)$. 6

b) Welches ist die Lösungsmenge L der Gleichung $2^x = 2^{x+1}$? 4

(1) $L = \{\ \}$ (2) $L = \{1\}$

(3) $L = \{0\}$ (4) $L = \{-1\}$

Gesamt: 50

© RAABE 2020

VORANSICHT

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de