Ganzrationale Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Alfred Müller, Coburg

Stromtarife lassen sich durch eine ganzrationale Funktion modellieren. In diesem Beitrag geht es um Übungen im Bereich der ganzrationalen Funktionen. Ziel ist es, das Wissen der Schüler durch vorgefertigte Tests unter Beweis zu stellen und ihr Zeitmanagement zu fördern.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett-Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © adventtr/iStock/Getty Images Plus
Lektorat: Christin Bossert, Rastatt, Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Ganzrationale Funktionen – Lernerfolgskontrollen

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg

Die Schüler lernen:

Viele Alltagsprobleme lassen sich durch eine ganzrationale Funktion modellieren. In diesem Beitrag geht es um Übungen im Bereich der ganzrationalen Funktionen. Ziel ist es, das Wissen der Schüler durch vorgefertigte Tests unter Beweis zu stellen und ihr Zeitmanagement zu fördern.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Maximalflächen – Test 1	M 1	[illegible] LEK
Funktionenscharen – Test 2	M 2	Ab, LEK
Kurven und Schnittpunkte – Test 3	M [illegible]	Ab, LEK
Integralfunktionen – Test 4	M 4	Ab, LEK

M 1 Maximalflächen – Test 1

1.

a) Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion $f_b : x \mapsto f_b(x)$, für die gilt:
$f_b(x) = \left[f_b'(x)\right]^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Begründen Sie dabei ihren Gradansatz. $\left(f_b(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2\right)$ 6

b) Begründen Sie, dass der Graph G_b der Funktion f_b die x-Achse berührt, und bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes $S(s_x|s_y)$. Zeichnen Sie G_2 für $b = 2$ im Intervall $I = [-8; 0]$. 5

c) Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die der Graph G_b mit der x-Achse zwischen der Achse $x = s_x$ und der y-Achse einschließt. 4

2. Nun sei $b = 2$. Die ganzrationale Funktion 2. Grades $g: x \mapsto g(x)$ hat ihren Scheitel S′ in $S'(-4|5)$ und schneidet den Graphen G_2 auf der y-Achse.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = g(x)$ und skizzieren Sie deren Graphen G_g in das Koordinatensystem von Aufgabe 1b). 5

b) Die Gerade $y = u^2 \left(0 < u^2 < 5 \right)$ schneidet den Graphen G_2 in den Punkten A und B. Für welchen Wert von u hat das Dreieck ABS' den maximalen Flächeninhalt? Bestimmen Sie diesen anschließend. 6

c) Die Graphen G_2 und G_g schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Inhalt. 3

d) In diese Fläche von 2c) soll ein Rechteck, dessen Seiten achsenparallel sind, mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Bestimmen Sie die Maßzahlen der Seitenlängen sowie den Flächeninhalt des Rechtecks. 5

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + 4x$ eine Stammfunktion der Funktion f_2 ist. Zeigen Sie dann, dass es genau eine Integralfunktion $I(x)$ zur Funktion f_2 gibt, die mit $F(x)$ übereinstimmt. 6

Gesamt: 40
Arbeitszeit: 60 Minuten

M 2 Funktionenscharen – Test 2

1. Gegeben ist die in $D_f = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - ax^2 + a^2x,\ a \in \mathbb{R}^+$ mit den Graphen G_f.
   a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Nullstellen von f_a und beurteilen Sie das Ergebnis.
   b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Art und Lage der Extremwerte sowie die Koordinaten des Wendepunktes W. 6
   c) Jeder Graph G_f schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie a so, dass dieser Flächeninhalt den Wert A = [illegible]7 FE besitzt. 4
   d) Zeichnen Sie den Graphen G_3 für $a = 3$ im Intervall $[-0,5;$ [illegible]$]$. 4

2. Der Graph G_p der Funktion $p_a(x) = bx^2 + cx$ und mit $D_p = \mathbb{R}$ ist eine Parabel.
   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Funktionsgleichung $y = p_a(x)$, wenn die Parabel G_p den Graphen G_f im Ursprung berührt und im weiteren gemeinsamen Punkt mit der x-Achse schneidet.
   $\left(p_a(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + a^2x\right)$ 6
   b) Bestimmen Sie den Scheitel der Parabel G_p und zeichnen Sie G_p für $a = 3$ in das Koordinatensystem der Aufgabe 1d). 4
   c) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, die G_f und G_p miteinander einschließen. 4
   d) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(0 < u < 2a)$ schneidet den Graphen G_p im Punkt R und den Graphen G_f im Punkt P. Bestimmen Sie u so, dass die Länge $\ell = \overline{RP}$ maximal wird. 5

3. Begründen Sie, dass die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x p_3(t)dt$ für $x > 0$ genau eine Nullstelle besitzt. 4

Gesamt: 40

Arbeitszeit: 45 Minuten

M 3 Kurven und Schnittpunkte – Test 3

1. Gegeben ist die Funktion f_a mit $D_f = \mathbb{R}$ durch ihre Gleichung $f_a(x) = -x^2 + 3ax$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Ihr Graph sei G_f.
   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten und die Art des Extremwertes. Welche Gleichung besitzt die Kurve K, auf der sich alle Extremwerte bewegen, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt? 5
   b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$ des Graphen G_f mit der x-Achse. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:
   $f_a'(x_1) + f_a'(x_2) = 0.$
   Deuten Sie dieses Ergebnis geometrisch. 5
   c) Bestimmen Sie nun a so, dass der Graph G_f mit der x-Achse eine Fläche A mit $A = 4{,}5$ FE einschließt. 6
   d) Zeichnen Sie den Graphen G_f mit dem in 1c) bestimmten a im Intervall $[-1;\ 4]$ und den Graphen G_K der Kurve K in $[0;\ 2]$. 4
   e) Es sei a = 1. Die Kurve K teilt die Fläche A in zwei Flächen A_1 (links) und A_2 (rechts). Berechnen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$. 6

2. Nun sei $a = 1$. Die Gerade $x = d\ (0 < d < 3)$ schneidet die x-Achse im Punkt $A(d|0)$ und den Graphen G_f für $a = 1$ im Punkt $B(d|f_1(d))$. Für welchen Wert von d ist die Fläche des Dreiecks OAB maximal? 6

3. Die Funktion F mit
   $$F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \int_1^x (-t^2 + 3t)\,dt$$
   ist eine Integralfunktion zur Funktion f_1.
   a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals: $F(x)$ besitzt zwei Extremwerte und einen Wendepunkt. Geben Sie die Abszissen dieser Punkte an. 4
   b) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit der Gleichung $G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zur Funktion f_1 ist. Welcher Zusammenhang besteht allgemein zwischen Stammfunktion und Integralfunktion? Für welchen Wert von c stimmen G(x) und F(x) überein? 4

Gesamt: 40
Arbeitszeit: 40 Minuten

M 4 Integralfunktionen – Test 4

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und dem Graphen G_f.
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels S sowie die Nullstellen der Funktion f. 3
   b) Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt. Für welchen Wert von a gilt $\int_0^a f(x)\,dx = \int_a^4 f(x)\,dx$? 6
   c) Zeichnen Sie die Gerade $g:\ y = x$ in das Koordinatensystem von 1b) und bestimmen Sie das Verhältnis der Flächen, in dem die Gerade g die Fläche A teilt. 5
   d) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt,\ D_F = \mathbb{R}$ ist die Gleichung einer Integralfunktion F zur Funktion f.
   Geben Sie die Abszissen der Extremwerte von F an und bestimmen Sie für F eine integralfreie Darstellung. 3
   e) $G:\ x \mapsto G(x)$ ist die Stammfunktion zur Funktion f durch den Punkt $P(1|1)$. Bestimmen Sie $y = G(x)$. 3

2. Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x,\ D_h = \mathbb{R}$ mit dem Graphen G_h.
   a) $H(x) = \int h(x)\,dx$. Bestimmen Sie den Term von $H(x)$. 2
   b) $K(x) = \int_2^x h(t)\,dt,\ D_K = D_h$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von K. 3
   c) Begründen Sie, dass die Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung ist, bestimmen Sie die Nullstellen von h sowie den Inhalt der Fläche, die der Graph G_h mit der x-Achse einschließt. 5

3. Zeigen Sie: Wenn eine ganzrationale Funktion 3. Grades den Ursprung als Wendepunkt besitzt, dann ist dieser das Symmetriezentrum. 6

4. Welcher der folgenden Terme enthält den Faktor $(x - 1)$? 4
   $T_1(x) = x^3 + 1$ $\qquad T_2(x) = x^3 - 1$
   $T_3(x) = x$ [illegible] $+6$ $\qquad T_4(x) = x^3 + 3x - 2$

Gesamt: 40
Arbeitszeit: 55 Minuten