Diskussion von Exponentialfunktionen und ihre Anwendung

von Alfred Müller

© 101cats/Getty Images Plus/E+

In diesem Beitrag führen Ihre Schüler die Kurvendiskussion verschiedener Exponentialfunktionen durch. Strauchwachstum und die Tilgung eines Darlehens stellen dabei anschauliche Anwendungskontexte dar. Außerdem berechnen die Lernenden das Volumen eines Doppelkegels und eines Kegelstumpfes.

RAABE
KLASSE SCHULE

Diskussion von Exponentialfunktionen und ihre Anwendung

von Alfred Müller

Übersicht 1

Exponentialfunktion und Darlehenstilgung 3

Exponentialfunktion und Doppelkegel 4

Exponentialfunktion und Kegelstumpf 5

Exponentialfunktion und Strauchwachstum 6

Lösungen 7

Kompetenzprofil

Inhalt:	Diskussion von Exponentialfunktionen; Anwendung auf die Tilgung eines Darlehens; Volumenberechnung eines Doppelkegels; Volumenberechnung eines Kegelstumpfes, Anwendung auf Strauchwachstum
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3)

Diskussion von Exponentialfunktionen und ihre Anwendung

Exponentialfunktion und Darlehenstilgung

1. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = ax +$ [illegible] e^{1-x} mit $a \in IR^+$. Definitionsmenge $D_a = IR$ und dem Graphen G_a.
   a) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen G_a mit der y-Achse und geben Sie das Verhalten von f_a für $x \dashrightarrow \infty$ und $x \dashrightarrow -\infty$ an.
   b) Untersuchen Sie die Funktionen f_a in Abhängigkeit von a auf Extremwerte und Wendepunkte.
   c) Geben Sie eine Gleichung y = k (x) des geometrischen Ortes der Tiefpunkte T_a an.
   d) Gegeben ist ferner die Gerade g: $y = g(x) =$ [illegible] 1. Berechnen Sie für a = 1 den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty}\left[f_1(x) - g(x)\right]$. Deuten Sie diesen Grenzwert geometrisch.

   e) Zeichnen Sie anhand einer Wertetabelle den Graphen G_1 für a = 1 sowie die Gerade g und die Kurve K aus Teilaufgabe 1c.
   f) Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen zur Funktion f_1 und zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -e^{1}$ [illegible] $+ x) + x$ eine Stammfunktion zur Funktion k der Kurve K ist. Berechnen Sie dann den Inhalt der Fläche A, die die Graphen G_1 und K miteinander einschließen.
   g) Der Graph G_1 der Funktion f_1 und die Gerade g schließen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein, dass sich ins Unendliche erstreckt. Berechnen Sie dessen Inhalt.
   h) Die Gerade [illegible] u (u [illegible]) schneidet den Graphen G_1 im Punkt P und die Gerade g im Punkt Q. Die Punkte P, Q und R (0 < 1) bestimmen ein Dreieck. Für welchen Wert [illegible] wird der Flächeninhalt AD des Dreiecks PQR maximal und wie groß ist dann $A_{\Delta\, m}$[illegible]?

2. Die Tilgung eines Bankdarlehens wird näherungsweise durch die Exponentialfunktion $R(t) = -$ [illegible] $\cdot$ [illegible]$^{,04} \cdot t + 250\,000$ beschrieben, wobei R(t) die Restschuld in Euro nach t Jahren bedeutet. Wie groß ist die Darlehenssumme und nach wie vielen Jahren ist das Darlehen getilgt?

Lösungen

Exponentialfunktion und Darlehenstilgung

1. $f_a(x) = ax + 1 + e^{1-x}$, $a \in IR^+$

a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y = f_a(0) = 1 + e \Rightarrow N\ (0 \mid 1 + e)$

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$, weil $ax \dashrightarrow \infty \wedge e^{1-x} \dashrightarrow 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$, weil $e^1 - x \dashrightarrow \infty$ „schneller" konve[illegible]giert als [illegible] $\dashrightarrow -\infty$

b) Extremwerte und Wendepunkte:

$f_a'(x) = a - e^{1-x} \wedge f_a''(x) = e^{1-x}$

$f_a'(x) = 0$: $e^{1-x} = a \Rightarrow 1 - x = \ln a \Rightarrow x = 1$ [illegible] $\ln a$

$f_a(1 - \ln a) = a - a \cdot \ln a + 1 + a = a\ (2 - \ln$ [illegible] $1 \wedge f_a''$ ([illegible] $+ \ln a) > 0$

$\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_a\ (1 - \ln a \mid a\ (2 - l$[illegible] $+ 1)$

$f_a''(x) \neq 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte

c) Ortskurve K:

$x = 1 - \ln a \wedge y = a\ (2 - \ln a) + 1$

$\ln a = 1 - x \Rightarrow a = e^{1-x}$

K: $y = e^{1-x}(2 - (1 - x))$ [illegible] 1 [illegible]$^{x}(1 + x) + 1$

$\Rightarrow y = k(x) = (x + 1) \cdot e^{1-}$[illegible] $+ 1$

d) $y = g(x) = x$ [illegible] $(x) = x + 1$ [illegible] e^{1-x}

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f_1(x)\right.$ [illegible] $\left.g(x))\right] =$ [illegible]$m\ e^{1-x} = 0$

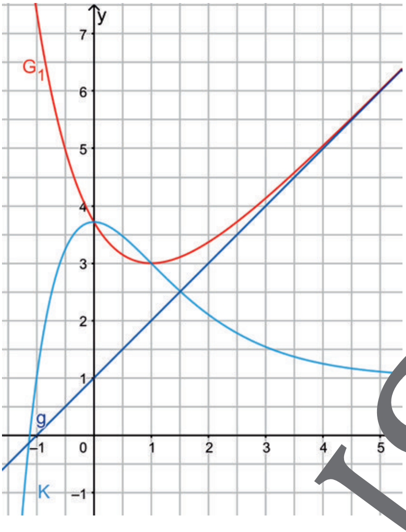
$\Rightarrow$ Die Gerade [illegible]mit der Gleichung $y = g(x)$ nähert sich im Unendlichen immer me[illegible]en Graph[illegible] G_1 an

$\Rightarrow$ Die Gera[illegible]: $y = x + 1$ ist schiefe Asymptote des Graphen G_1.

[illegible]) W[illegible]tetabelle:

x	[illegible]1	0	1	2	3	4
f[illegible] (x)	7,39	3,72	3	3,36	4,14	4,05
k([illegible])	1	3,72	3	2,10	1,54	1,25

Graphen G_1, K, g:



f) Menge aller Stammfunktione[illegible]ur Funktion f_1:

$$F(x) = \int f_1(x)dx = \int \left(x + 1 + e^{1-x}\right)dx \text{ [illegible] } \frac{1}{2}x^2 + x - e^1 - \ x + c$$

$G(x) = 1 - (x + 2)e^{1-x}$ [illegible] x ist [illegible] Stammfunktion zur Funktion k, wenn $G'(x) = k(x)$ gilt.

$G'(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (x + 2)$ [illegible] $^{1-x} + 1$

$= -e^{1}$ [illegible] $^{1-x} + 2e^{1-}$ [illegible] 1

$= e$ [illegible] $^{x}(1 + x)$ [illegible] 1

$= k$ [illegible]

⇒ G ist Stam[illegible]nktion zur Funktion k.

S[illegible]nkt von f_1 [illegible]d k:

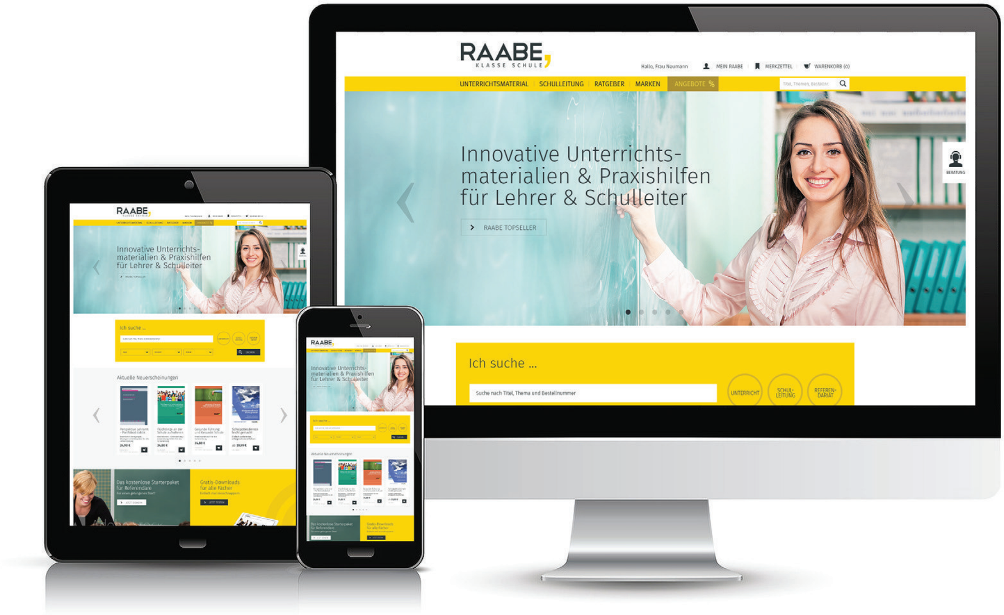
$f_1(x) = k(x)$

$x + 1 + e^{1-x} =$ [illegible] $+ 1)\ e^{1-x} + 1$

[illegible] $1 + e^{1-x} = x$ [illegible] $^{1-x} + e^{1-x} + 1$

$x\ (1$ [illegible] $^{1-x})$ [illegible] $0 \Rightarrow x = 0 \vee e^{1-x} = 1 \Rightarrow x = 1$

Schnittpunkte: $S_1\ (0 \mid e + 1)$; $S_2\ (1 \mid 3)$


RAABE, KLASSE SCHULE
Hallo, Frau Neumann
MEIN RAABE
MERKZETTEL
WARENKORB (0)
UNTERRICHTSMATERIAL
SCHULLEITUNG
RATGEBER
MARKEN
ANGEBOTE %
Innovative Unterrichts-materialien & Praxishilfen für Lehrer & Schulleiter
RAABE TOPSELLER
BERATUNG
Ich suche ...
Suche nach Titel, Thema und Bestellnummer
UNTERRICHT
SCHUL-LEITUNG
REFEREN-DARIAT
Aktuelle Neuerscheinungen
Das kostenlose Starterpaket für Referendare
Gratis-Downloads für alle Fächer