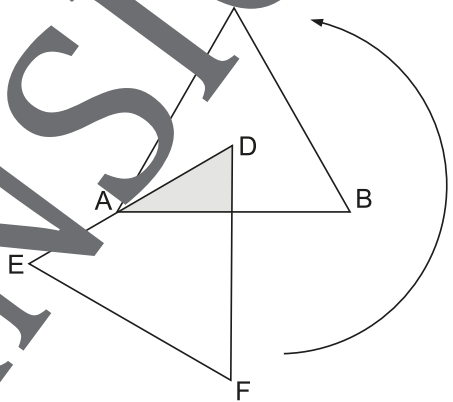


UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Flächenüberdeckung mit Drehung der Deckfläche
um einen festen Punkt

Vernetztes Denken fördern

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60a UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen und Sie berechnen, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile davon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 1 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung und Verbreitung musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 6290-0
Fax +49 711 6290-60
meinRaabe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Stefan Orth
Satz: Kaiser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Redaktion
Layout: Markus Hensgens

Flächenüberdeckung mit Drehung der Deckfläche um einen festen Punkt

Gegeben sind zwei kongruente gleichseitige Dreiecke ABC und DEF. Sie werden so aufeinander gelegt, dass D auf dem Schwerpunkt von ABC liegt. Das Dreieck DEF wird um D gedreht. Dabei gehört zu jedem Drehwinkel ein Flächenstück, in dem sich beide Dreiecke überdecken. Gesucht ist eine Funktionsgleichung, welche geeignet erscheint, die Größe dieses Flächenstückes in Abhängigkeit vom Drehwinkel anzugeben. Im ersten Teil der Arbeit sollen Vermutungen angestellt werden, ob der Graph der gesuchten Funktion durch eine sin-Kurve oder durch Aneinanderfügen von Ästen quadratischer Parabeln dargestellt werden kann. Im zweiten Teil sollen dann Überdeckungsflächen für einen Drehwinkel x bestimmt werden, wobei der Fall einer dreieckigen von dem Fall einer viereckigen Überdeckungsfläche zu unterscheiden ist.

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: präsentieren
- Problemlösen: Probleme erkennen, vernetzen, denken
- Modellierung: –
- Medien: Computer (DGS)
- Methode: Facharbeit
- Inhalt in Stichworten: Dreieck; Flächeninhalt; Regression; Sinusfunktion; Parabel

Autor: Roland Schröder

1. Allgemeine Voraussetzungen

- a) Festlegungen (Nullposition hinsichtlich der Drehung, Seitenlänge der Dreiecke)

Die Nullposition ist in der Abbildung dargestellt. Die Drehung erfolgt gegen den Uhrzeigersinn. Die Seitenlänge der Dreiecke wird zwecks einfacherer Terme mit 1 festgelegt.

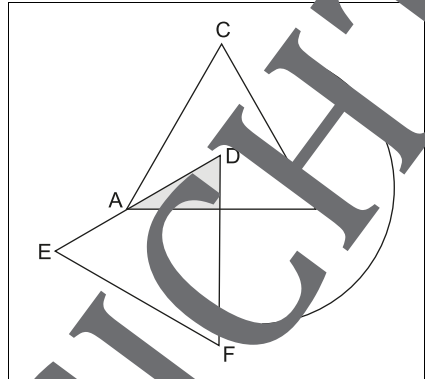


Abb. 1

- b) Betrachtung von Spezialfällen

Ein Spezialfall wird in Abbildung 1 gezeigt. Weitere Spezialfälle werden sichtbar, wenn man die Dreiecksfläche wie in Abbildung 2 aufteilt:

In dieser Darstellung sind die abgebildeten Überdeckungsflächen direkt ablesbar.

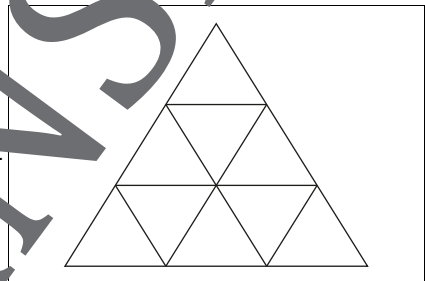


Abb. 2

Drehung	überdeckter Anteil
0°	$\frac{1}{6}$
90°	$\frac{2}{9}$
30°	$\frac{1}{9}$

- c) Lage des Schwerpunktes und Fläche des gleichseitigen Dreiecks
 Im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 gilt nach Pythagoras:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und dann ist der Flächeninhalt:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Im gleichseitigen Dreieck teilt der Schwerpunkt die Höhe im Verhältnis 2:1. Folglich hat der Schwerpunkt von jeder Seite den Abstand $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

- d) Der Begriff des Flächenanteils
 Unter einem Flächenanteil versteht man das Maß der Teilfläche dividiert durch das Maß der Gesamtfläche. Der Divisor ist daher $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Annäherung durch eine sin...

- a) Wertetabelle mithilfe der Spezialfälle

Drehwinkel		30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°
Überdeckter Flächenanteil		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
Drehwinkel	240°	270°	300°	330°	360°			
Überdeckter Flächenanteil	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$			

b) Bestimmung der Parameter der Verschiebung und Stauchung

Für eine Zuordnung mittels sin-Funktion gehen wir von nebenstehender Vorstellung aus (siehe Abbildung). Dann ist die Periode 120° und die Verschiebung in y-Richtung $\frac{1}{6}$.

Die Auslenkung beträgt $\frac{1}{18}$.

Die sin-Kurve ist außerdem an der zentralen waagerechten Achse gespiegelt.

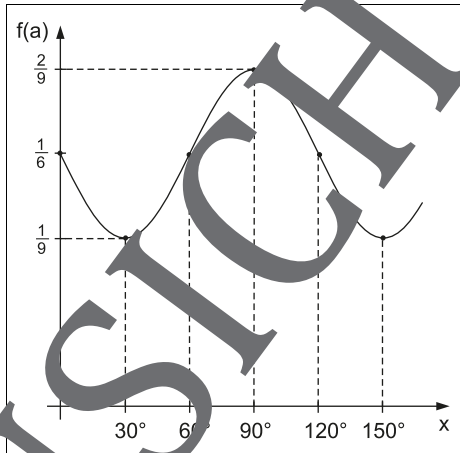


Abb. 3

c) Angabe einer sin-Funktion als Hypothese

Die Vermutung darüber, welche sin-Funktionsgleichung zur Zuordnung „Drehwinkel \rightarrow Überdeckter Flächenanteil“ gehören könnte, lautet dann:

$$f(x) = -\frac{\sin(3x)}{18} + \frac{1}{6}$$

3. Annäherung an Parabeln

a) Parabel mit Scheitelpunkt im ersten Tiefpunkt

Eine Parabel durch die Punkte $(0; \frac{1}{6})$, $(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{9})$, $(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{6})$ hat die Scheitelform.

$$f(x) = a \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{9}$$

Zur Bestimmung von a setzen wir den Punkt $(0; \frac{1}{6})$ ein:

$$\frac{1}{6} = a \left(0 - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{9} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2}{\pi^2}$$

4. Allgemeine Berechnung der Flächenfunktion im Fall einer dreieckigen Überschneidungsfläche

- a) Das Lot vom Schwerpunkt auf eine Dreiecksseite als Hilfslinie

Eine dreieckige Überschneidungsfläche wie in der Abbildung wird durch das Lot von D auf AB in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt, deren Flächen sich als halbes Produkt der beiden Kathetenlängen berechnen lassen.

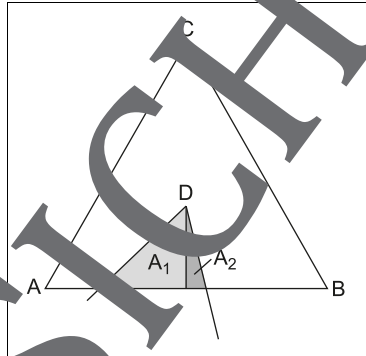


Abb. 4

- b) Benennung der Winkel zwischen Hilfslinie und Seiten des Überschneidungsdreieck

Das Dreieck AHD hat die Nulllage. Es wurde um den Winkel der Größe x gedreht.

Dann haben die beiden Winkel, in welche die Hilfslinie den 60° -Winkel der Überdeckungsfläche zerlegt, die Größen x und $60^\circ - x$.

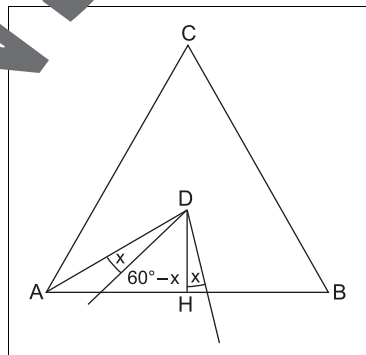
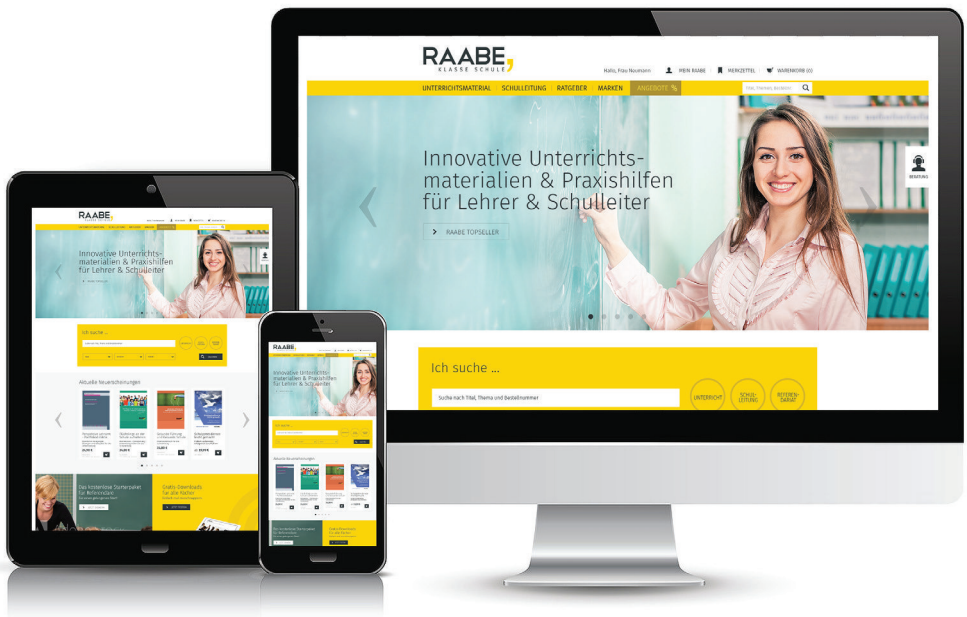


Abb. 5

Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de