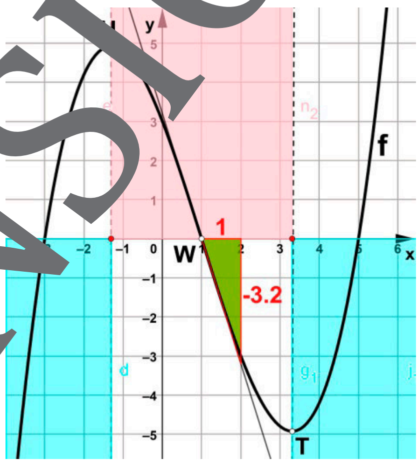
# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Analysis Sek. II




**Grafisches Differenzieren**

Ein Lernzirkel zur Analysis

RAABE, KLASSE SCHULE

**Impressum**

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II



Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: S[illegible] Ortl[illegible]
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: Dr. Jürgen Leitz
Lektorat: Mona Hitzenauer

# Grafisches Differenzieren – ein Lernzirkel zur Analysis

## Fachwissenschaftliche Einordnung

Bei der Kurvendiskussion (Kurvenuntersuchung) liefern die drei Ableitungen einer Funktion Kriterien für notwendige und hinreichende Bedingungen zum Bestimmen markanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkt) und werden zur Verlaufsbestimmung des Graphen (Monotonie, Krümmungsverhalten) angewendet. Somit kann grob der Verlauf einer Funktion gezeichnet werden.

Die Ableitung einer Funktion ist zum anderen wieder eine Funktion. Da sie auch die Änderungsrate des durch die Funktion beschriebenen Prozesses darstellt, wird sie zu Betrachtungen von Veränderungen in der Wirtschaft, Biologie, Medizin, Physik und anderen Bereichen angewendet.

So ist in der Physik die (erste) Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit, d. h. $v(t) = s'(t)$. Die Momentanbeschleunigung ist die (erste) Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit und zugleich die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

In der Wirtschaft ist die Grenzkostenfunktion $K_G(x) = K'(x)$ die (erste) Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K(x)$. Bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen ist die erste Ableitung die Wachstums- bzw. Zerfallsgeschwindigkeit der Wachstums- bzw. Zerfallsgröße. In der Medizin ist die Änderungsrate beispielsweise durch die Gesundungs- bzw. Erkrankungsrate gegeben.

Nicht immer ist jedoch der analytische Ausdruck der betrachteten Funktionsgröße gegeben und man kennt nur den Graphen, aus dem dann zumindest der Graph der Ableitungsfunktion zum Bestimmen der momentanen Änderungsrate zeichnerisch gewonnen werden kann. Diese grobe Darstellung der jeweiligen Veränderung der betrachteten Größe zu einem bestimmten Zeitpunkt reicht in den meisten Fällen aus.

Beim **grafischen Differenzieren** geht es um das Zeichnen (streng genommen um das Skizzieren) des Graphen G´ der Ableitungsfunktion g´(x) einer Funktion g(x), die durch ihren Funktionsgraphen G vorgegeben ist.

In einem weiteren Beitrag geht es dann um das **grafische Integrieren.**

## Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen

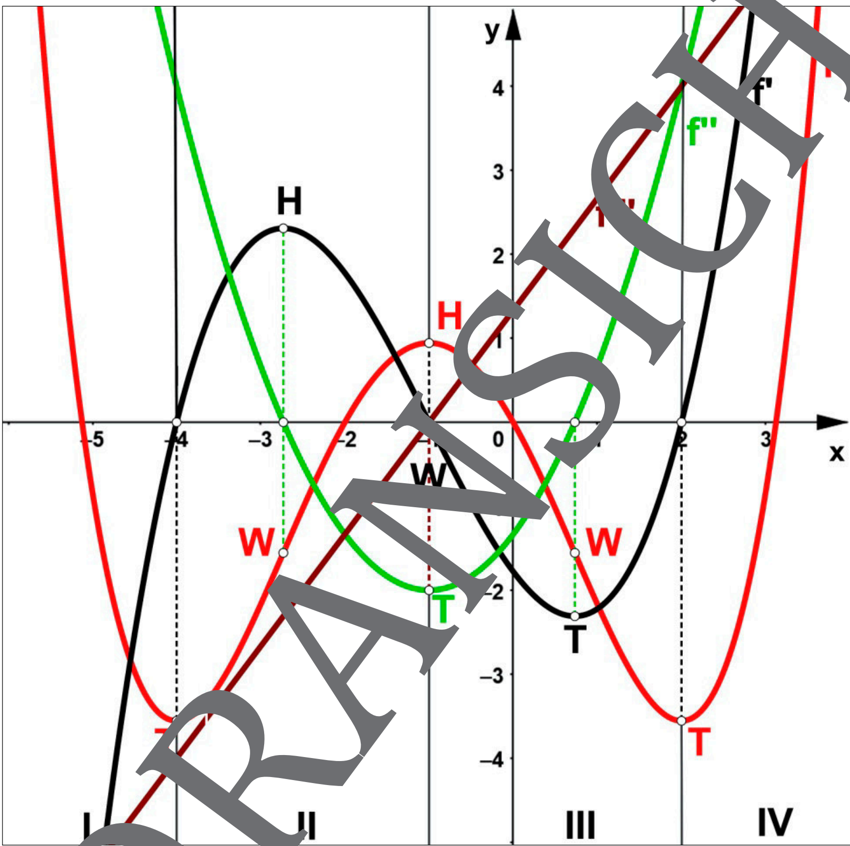



Abb. 1

## Zur Wiederholung: Zusammenhang zwischen den Graphen von f, f ' und f ''

*Hinweis:* Verwenden Sie die grafische Darstellung in Abb. 1

1. Ergänzen Sie folgenden Lückentext.

   Die Steigungswerte (lokale _____________rate) einer Funktion werden durch den Graphen der _____________________________________ dargestellt.

   Die _______________ einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist gleich dem Funktionswert der __________________________________ an dieser Stelle.

   In ________-, _________- und _________punkten ist die Tangente ____________________ und somit ist die Steigung _________.

   In den Punkten mit der _________________/ kleinsten Steigung ändert sich das _________________________verhalten des Ausgangsgraphen: Übergang von einer ___________- in eine ___________ kurve oder umgekehrt. Diese Punkte werden deshalb auch _______________ punkte genannt.

   Ein (lokaler) Hochpunkt/Tiefpunkt der Ausgangsfunktion f ist eine ______stelle der Ableitungsfunktion f ' und ist somit ein Schnittpunkt mit der ____-Achse.

   Notwendige Bedingung für einen Hoch- /Tiefpunkt ist, dass die erste Ableitung an dieser Stelle den Wert___________ hat.

   Neben der notwendigen Bedingung muss noch die _______________ Bedingung für einen Extremwert an der Stelle $x_E$ erfüllt sein:

   (1) Wenn $f''(x_E)$ ______ 0 ist, dann liegt ein Hochpunkt vor.

   (2) Wenn $f''(x_E)$ ______ 0 ist, dann liegt ein Tiefpunkt vor.

Ein Wendepunkt der Ausgangsfunktion entspricht einem ____________________ der Ableitungsfunktion.

Ist der Graph der Ausgangsfunktion ________________________, dann ist der Graph der Ableitungsfunktion punktsymmetrisch.
Wenn der Graph der Ableitungsfunktion achsensymmetrisch ist, dann ist der Graph der Ausgangsfunktion ______________________________.

2. Füllen Sie die Leerstellen in der Tabelle aus.

| **Funktion f(x)** | **Erste Ableitung f '(x)** | **Zweite Ableitung f ''(x)** |
|---|---|---|
| Der Graph von f ist im betrachteten Intervall streng monoton wachsend. | f '(x) ______0 im betrachteten Intervall. Der Graph von f ' verläuft oberhalb der x-Achse. | Keine Aussage möglich. |
| Der Graph von f ist im betrachteten Intervall streng monoton ___________________. | f '(x) < 0 im betrachteten Intervall. Der Graph von f ' verläuft __________halb der x-Achse. | ____________________ |
| Der Graph von f hat im betrachteten Intervall eine Linkskurve. | Der Graph von f ' ist im betrachteten Intervall streng monoton ___________________. | f ''(x) _____0 im betrachteten Intervall. |
| Der Graph von f hat im betrachteten Intervall eine _______________. | Der Graph von f ' ist im betrachteten Intervall streng monoton fallend. | f ''(x) _____0 im betrachteten Intervall. |

## Grafisches Differenzieren

Beim grafischen Differenzieren (zeichnerischen Ableiten) einer Funktion f(x) als Ausgangsfunktion, von der nur ihr Graph f bekannt ist, soll der Graph f ' der Ableitungsfunktion f '(x) gezeichnet (skizziert) werden.

Hierfür eignen sich u. a. die folgenden **zwei Verfahren**:

- Zeichnen des Graphen f ' der Ableitungsfunktion f '(x) mithilfe der Tangentensteigungen von f (Methode 1)
- Zeichnen des Graphen f ' der Ableitungsfunktion f '(x) mithilfe von Steigungsbereichen des Graphen f ( Methode 2)

### Methode 1: Grafisches Differenzieren mithilfe von Tangentensteigungen

***Schrittfolge:*** Zum Skizzieren des Graphen der Ableitungsfunktion f ' aus dem Graphen einer Funktion f erweist sich folgende Schrittfolge als nützlich:

**Schritt 1**
Die Stellen des Graphen von f mit horizontaler Tangente (Hoch-, Tief- und Sattelpunkte), bei denen eindeutig die Steigung null abgelesen werden kann, sind die Nullstellen der Ableitungsfunktion f '.

**Schritt 2**
Am Graphen der Funktion f werden an ausgewählten Punkten Tangenten gezeichnet und deren Steigungen mithilfe eines Steigungsdreiecks ermittelt. Wählt man für Δx die Länge eins, dann kann der Steigungswert ohne Berechnung sofort ermittelt werden. Der abgelesene Wert von Δy ist dann gleichzeitig die Tangentensteigung in diesem Punkt. Bei der Wahl eines kleineren bzw. größeren Steigungsdreiecks muss die Steigung berechnet werden; es gilt: $\mathbf{m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Die Tangentensteigungen werden in einer Wertetabelle festgehalten.

**Schritt 3**
Die in der Tabelle festgehaltenen Werte werden entweder in dasselbe Koordinatensystem oder aber in ein neues Koordinatensystem eingezeichnet und zu einem „geeigneten" Funktionsgraphen der Ableitungsfunktion f ' verbunden.

*Bemerkung:* Der Verlauf des Graphen von f ' kann durch wenige ermittelte Punkte nur grob gezeichnet werden. Bei der Wahl einer größeren Anzahl von Punktepaaren wäre eine genauere Zeichnung möglich, dies ist aber zeichnerisch aufgrund des Verlaufs des Ausgangsgraphen f nicht immer ohne größeren Aufwand möglich.

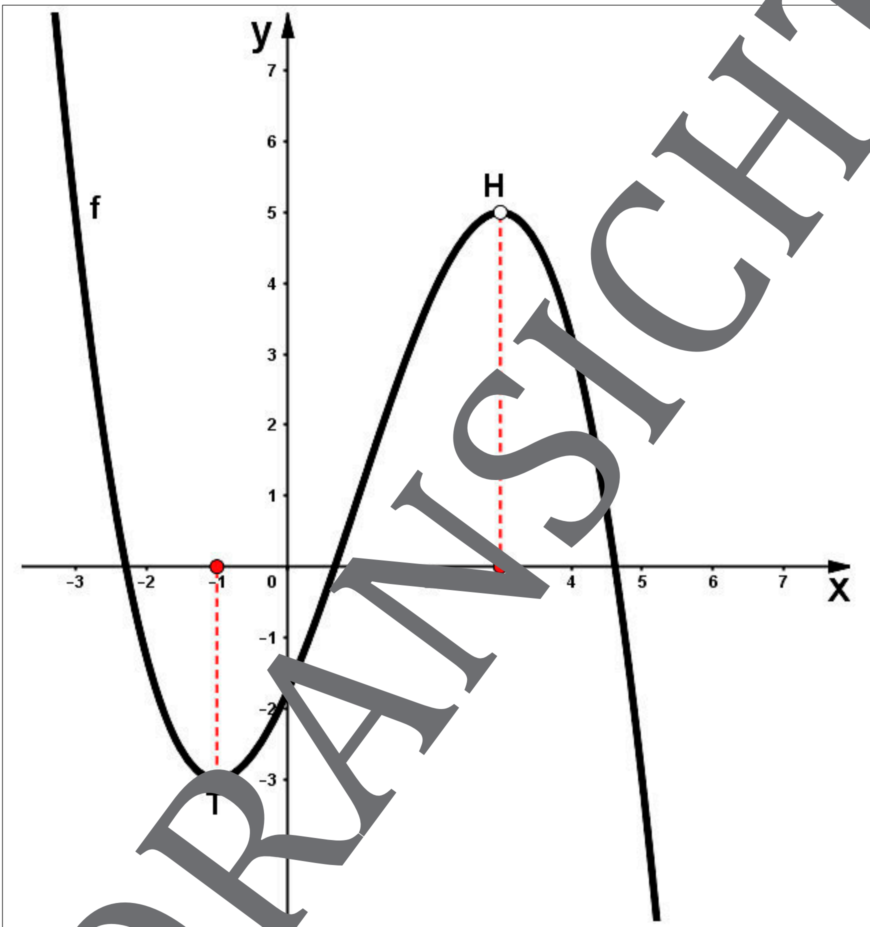



Abb. 2

**Schritt**

Die Stellen des Graphen f mit horizontaler Tangente (Hoch-, Tief- und Sattelpunkte) sind die Nullstellen der Ableitungsfunktion f '(x).

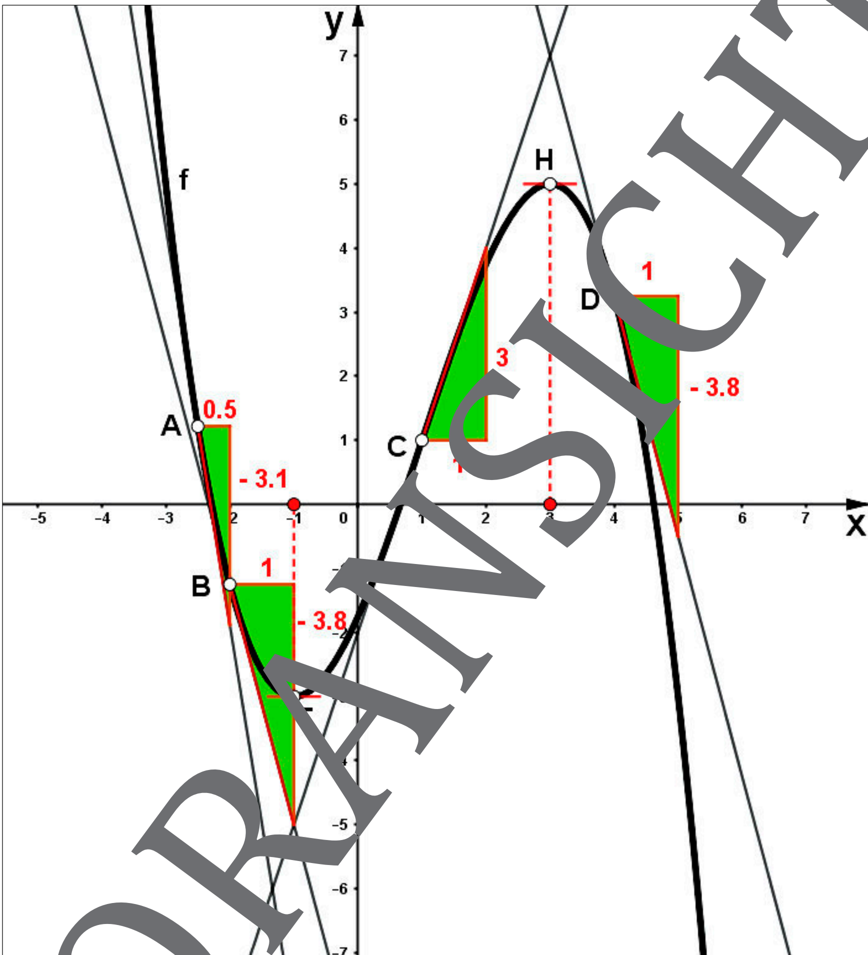



Abb. 3

**Schritt 2**

Am Graphen von f werden an ausgewählten Punkten **Tangenten** gezeichnet und deren Steigungen mithilfe eines **Steigungsdreiecks** ermittelt.

Wählt man für $\Delta x$ die Länge eins, so entspricht der abgelesene Wert von $\Delta y$ dem Steigungswert in diesem Punkt.

Allgemein gilt: $\mathbf{m_T = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Für die Punkte A, B, C, D, T und H in Abb. 3 ergeben sich folgende Steigungen:

Punkt A: $\quad m_T = \dfrac{-3{,}1}{0{,}5} = \dfrac{-6{,}2}{1} = \mathbf{-6{,}2} \Rightarrow A'(-2{,}5|-6{,}2)$

Punkt B: $\quad m_T = \dfrac{-3{,}8}{1} = \mathbf{-3{,}8} \Rightarrow B'(-2|-3{,}8)$

Punkt C: $\quad m_T = \dfrac{3}{1} = \mathbf{3} \Rightarrow C'(1|3)$

Punkt D: $\quad m_T = \dfrac{-3{,}8}{1} = \mathbf{-3{,}8} \Rightarrow D'(4|-3{,}8)$

Punkt H: $\quad m_T = \mathbf{0} \Rightarrow P(3|0)$ waagerechte Tangente

Punkt T: $\quad m_T = \mathbf{0} \Rightarrow Q(-1|0)$ waagerechte Tangente

Zusammenfassen der Werte für $f'(x)$ in einer Wertetabelle:

| **x** | –2,5 | –2 | –1 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **f '(x)** | –6,2 | –3,8 | 0 | 3 | 0 | –3,8 |

## LERNZIRKEL

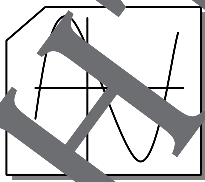
### Hinweise zum Ablauf

- Es gibt vier Stationen, die von jeder Gruppe zu durchlaufen sind.
- Jede Station besteht aus zwei Aufgaben, wobei der jeweilige Name der Stationen 1 bis 3 aus der Anzahl der Wendepunkte des Funktionsgraphen in Aufgabe 1 abgeleitet ist; bei Station 4 ist ein Wendepunkt gleichzeitig ein Sattelpunkt, daher der Name „Sattelpunkt“.
- Bei Aufgabe 1 ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion aus dem Graphen der Ausgangsfunktion grob zu skizzieren.

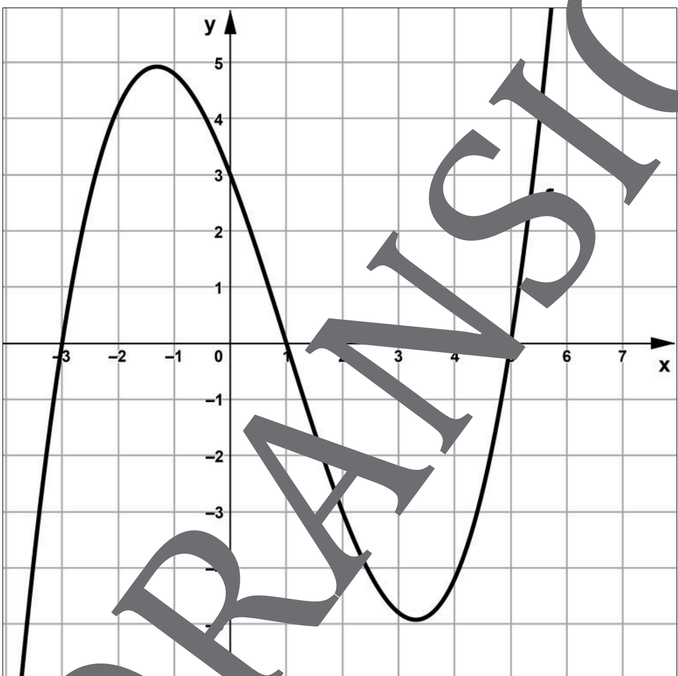
  *Hinweis:* Gehen Sie entsprechend der Schrittfolge zum grafischen Differenzieren mithilfe von Steigungsbereichen vor und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis ggf. mithilfe von Tangentensteigungen.
- Bei der Lösung von Aufgabe 2 müssen Sie jeweils Ihre Kenntnisse über den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen anwenden.
- Bearbeiten Sie die zwei Aufgaben einer Station in der vorgegebenen Reihenfolge.
- Lösen Sie die Aufgaben jeder Station in Kleingruppen von drei bis vier Schülern.
- Für das Lösen der Aufgaben ist für jede Station jeweils eine Unterrichtsstunde vorgesehen. Aufgaben, die Sie in dieser Zeit nicht schaffen, sollten Sie zu Hause fertigstellen.
- Bei Problemen tauschen Sie sich zunächst innerhalb Ihrer Kleingruppe aus und geben sich gegenseitig Hilfestellung. Wenn Sie als Gruppe nicht weiterkommen, nehmen Sie die Tippkarten zu Hilfe. Sollten Sie auch damit keinen Lösungsweg finden, unterstützt Sie der Lehrer.
- Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrertisch aus, sodass Sie Ihre Berechnungen und Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

# STATION 1

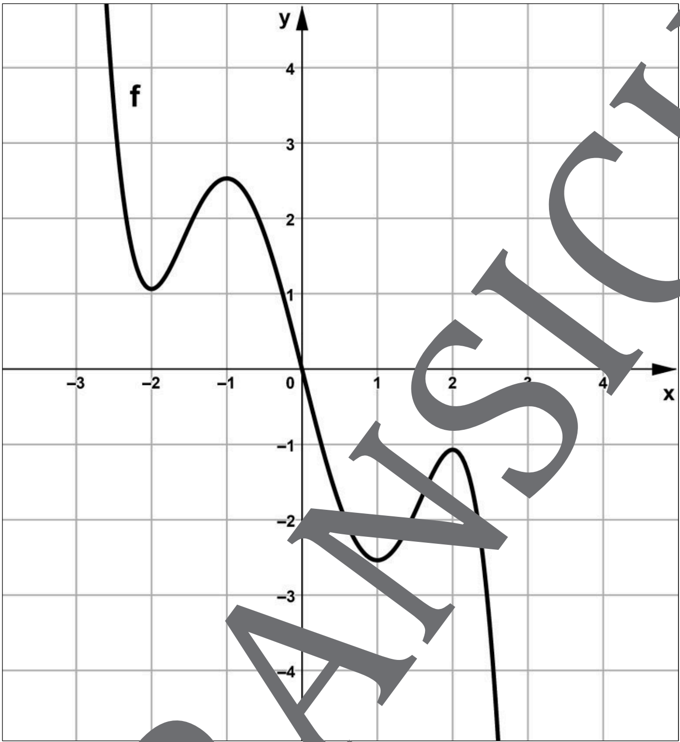
## WENDEPUNKT 1



1. Gegeben ist der Graph f einer Funktion f(x). Skizzieren Sie den Graphen $f'$ der Ableitungsfunktion $f'(x)$.



2. Gegeben ist der Graph f einer Funktion f(x).




Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) An der Stelle $x = -1$ ist $f''(x) < 0$.

b) Für $x < -2$ ist $f'(x) > 0$.

c) An der Stelle $x = 0$ ist $f''(x) = 0$.

d) An der Stelle $x = 1$ hat $f'$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.

e) Für $-1 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$.

f) An der Stelle $x = 1{,}5$ ist $f'(x) < 0$.

# Tippkarten

## Station 1

| Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 1 | Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte [illegible] |
|---|---|
| **Schritt 1**<br>Bestimmen Sie die Stellen, an denen der gegebene Graph f waagerechte Tangenten hat. | **Schritt 1**<br>Bei $x_1 \approx -1,3$ li[illegible]gt ein Hochpunkt, [illegible]i $x_2 \approx 3,3$ ein T[illegible]fpunkt. Die G[illegible]raden $x \approx -1,3$ und $x$ [illegible] kennzei[illegible]nen die Steigun[illegible]reiche. |
| **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 3** | **St[illegible] 1, Aufg[illegible]e 1: Tippkarte 4** |
| **Schritt 2**<br>Bestimmen Sie das Vorzeichen der Funktionswerte der Ableitungsfunktion $f'$ anhand des Steigungsverhaltens des gegebenen Graphen von f in den einze[illegible]en Bereichen. | **S[illegible]**<br>In den Intervalle[illegible] $]-\infty;-1,3[$ und $]$[illegible]$3;+\infty[$ s[illegible] der Graph von f. Das bedeu[illegible] dass die Steigung des Graphen von f p[illegible]tiv ist, also $f'(x) > 0$. Damit können die Bereiche unterhalb der x-[illegible]chse für diese Intervalle ausgeschlossen und entsprechend gekennzeichnet werden. Der Graph von $f'$ verläuft hier oberhalb der x-Achse. |
| **Station 1, Au[illegible]gabe 1[illegible] Tippkar[illegible] 5** | **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 6** |
| **Schritt 2**<br>Im Inter[illegible]3;3,3[ [illegible]er Graph von f. Das bedeu[illegible] dass d[illegible]e Steigung des Grap[illegible]en von f nega[illegible] ist, also $f'(x) < 0$. [illegible]amit [illegible]n der Bere[illegible]h oberhalb der x-A[illegible]hse für [illegible]es In[illegible]ervall ausgeschlossen und [illegible]ntsprechend gekennzeichnet werden. D[illegible]r Graph der Ableitungsfunktion [illegible] hier unterhalb der x-Achse. | **Schritt 3**<br>An welchen Stellen hat der gegebene Graph Wendepunkte?<br>Was für ein Krümmungswechsel liegt an diesen Stellen jeweils vor? |

| **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 7** | **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 8** |
|---|---|
| **Schritt 3**<br>Die Wendestelle des Graphen f liegt an der Stelle $x = 1$.<br>Das bedeutet, dass der Graph von $f'$ hier eine Extremstelle aufweist.<br>Da an der Wendestelle ein Rechts-Links-Wechsel vorliegt, besitzt der Graph von $f'$ an dieser Stelle einen Tiefpunkt. | **Schritt 3**<br>Die Tangentensteigung im Wendepunkt beträgt etwa $-3,2$.<br>Dies ist gleichzeitig der betragsmäßig größte negative Steigungswert (bzw. kleinster negativer Steigungswert) in diesem Bereich und gleichzeitig die y-Koordinate des Tiefpunktes des Graphen $f'$. |
| **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 9** | **Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 10** |
| **Schritt 4**<br>Verlauf des Graphen $f'$ im Intervall $]-\infty; -1,3[$ : Der Wert der Steigung des Graphen von f ist positiv und wird größer, schließlich ist er bei $x \approx -1,3$ am größten (Hochpunkt von f). Die Funktionswerte von $f'(x)$ sind auch positiv (Graph $f'$ verläuft oberhalb der x-Achse) und werden kleiner.<br>Sie gehen von $-\infty$ gegen null $(f'(-1,3) \approx 0.)$ | **Schritt 4**<br>Verlauf von $f'$ im Intervall $]-1,3; 1[$ :<br>Für $-1,3 < x < 1$ ist die Steigung von f negativ, wird kleiner und ist bei x = 1 (Wendepunkt) am kleinsten. Die Funktionswerte von $f'(x)$ sind deshalb auch negativ (Graph $f'$ verläuft unterhalb der x-Achse) und erreichen bei x = 1 ein Minimum mit $y \approx -3,2$. |

**Kompetenzprofil**

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: –
- Kommunikation: argumentieren, vergleichen, bewerten, begründen
- Problemlösen: Probleme erkunden und zerlegen, Lösungsstrategien entwickeln
- Modellierung: –
- Medien: Tageslichtprojektor bzw. PC mit Beamer, farbige Grafiken
- Methode: Lernzirkel, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Differenzieren, Ableitungen, Ableitungsfunktion, Extrempunkte, Wende- und Sattelpunkt, Nullstelle, Monotonie, Vorzeichenwechsel, Steigung, Änderungsrate, Tangente, waagerechte Tangente, Krümmung, konvex, konkav, Symmetrie

**Autor:** Dr. Jürgen Leitz

## Methodisch-didaktische Hinweise

Die Schüler besitzen bereits Kenntnisse aus der Differenzialrechnung und ihrer Anwendung beim Lösen mathematischer Probleme (Kurvendiskussion, Optimierungsaufgaben).
Die Unterrichtseinheit ist für etwa sechs Unterrichtsstunden vorgesehen. Den Schwerpunkt der Einheit bildet das grafische Differenzieren, wobei der Ableitungsgraph mit Kenntnis der Zusammenhänge zwischen der Ausgangsfunktion und den Ableitungsfunktionen zeichnerisch zu bestimmen ist.

Dazu wird in den beiden ersten Unterrichtsstunden (möglichst als Doppelstunde) bereits Bekanntes aus der Differenzialrechnung wie Ableitung, Ableitungsregeln und deren Anwendung wiederholt und Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion (der Ausgangsfunktion) und den Graphen ihrer beiden Ableitungsfunktionen hergestellt.

Eine Zusammenfassung als Übersicht des Zusammenhangs zwischen den Graphen von f, f ' und f '' finden Sie im Online-Archiv.

Anschließend werden zwei Methoden zur grafischen Ermittlung des Ableitungsgraphen präsentiert:

- Messen einzelner Tangentensteigungen
- Skizzieren des Verlaufs des Ableitungsgraphen in den verschiedenen Steigungsbereichen.

Beide Methoden werden jeweils mithilfe eines Foliensatzes (Abb. 2–8) vermittelt.

Zur besseren Veranschaulichung der grafischen Zusammenhänge stehen Ihnen die in den Foliensätzen verwendeten Abbildungen auch farbig im Online-Archiv zur Verfügung.

Die Übung und Festigung erfolgt in den nächsten vier Einzelstunden in Form eines Lernzirkels, der aus vier Stationen besteht und von jeder Lerngruppe zu durchlaufen ist. Die Schüler arbeiten in Kleingruppen von maximal drei bis vier Schülern. Jede Station besteht aus zwei Aufgaben: Bei Aufgabe 1 ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion aus dem Graphen der Ausgangsfunktion entsprechend der erarbeiteten Vorgehensweise grob zu skizzieren. Die Lösung der Aufgabe 2 erfordert das Überprüfen und Begründen von Aussagen über die Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen. Für das Lösen der Aufgaben ist für jede Station jeweils eine Unterrichtsstunde zu planen (s. a. Hinweise zum Lernzirkel auf Seite 26).

Mithilfe von Tippkarten werden Hinweise und Tipps zum Lösen jeder Aufgabe gegeben. Diese stellen Lösungshinweise dar, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrertisch aus, sodass die Schüler ihre Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

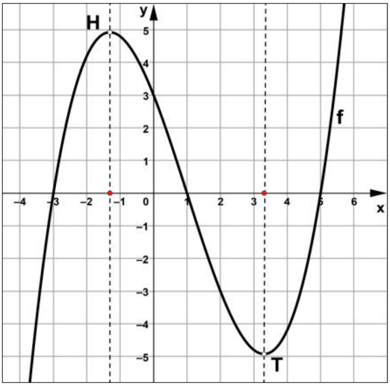
**Voraussetzungen**

- Ableitung und Ableitungsfunktion
- Bedeutung der Ableitung als Tangentensteigung und als Änderungsrate
- Kenntnis über markante Punkte eines Funktionsgraphen: Nullstellen, Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkte
- Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendepunkte
- Verlaufsbeschreibung eines Funktionsgraphen: Monotonie, Krümmung, Vorzeichenwechsel

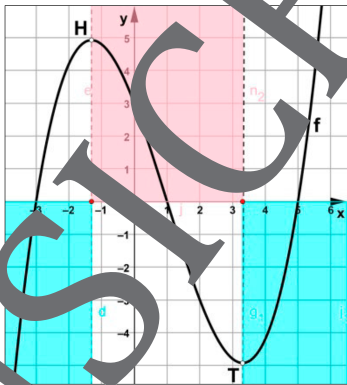
## Lösungen des Lernzirkels

### Station 1

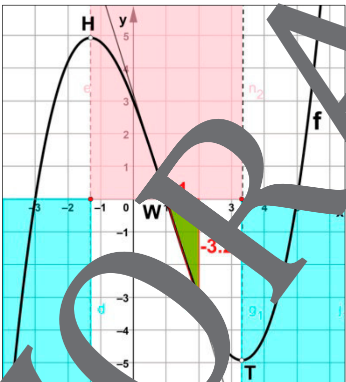
1.



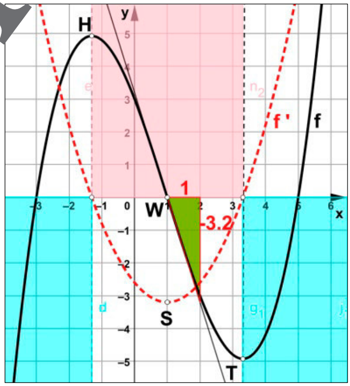

Schritt 1




Schritt 2




Schritt 3




Schritt 4