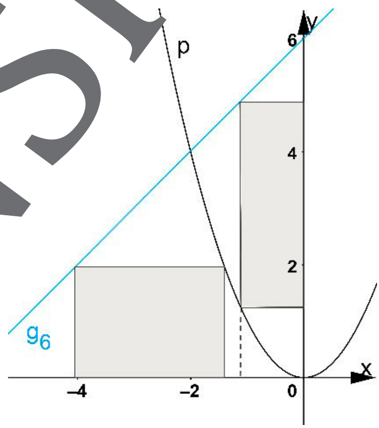
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Geraden- und Kurvenschar

knüpfung von Analysis und Analytischer Geometrie

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Lektorat: Markus Hensgens

Geraden- und Kurvenschar

1. **Geradenschar schneidet Normalparabel**
   Gegeben ist eine Parabel p mit der Gleichung $p(x) = x^2$ und für jede natürliche Zahl a eine Gerade g_a mit der Gleichung $g_a(x) = a + x$.

   a) Es sei a = 1. x_1 und x_2 seien die x-Koordinaten der Schnittpunkte von p und g_1. Der Ursprung O(0;0) teilt die Strecke von $A(x_1;0)$ nach $B(x_2;0)$ im Verhältnis m:n (n > m). Prüfen Sie, ob gilt $\frac{n}{m} = \frac{m+n}{n}$.
   (Man sagt: O teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes).

   b) Es sei a = 1. $R(x_1;y_1)$ und $S(x_2;y_2)$ seien die Schnittpunkte von p und g_1 ($y_2 > y_1$). Zeigen Sie, dass gilt $\frac{y_2}{y_1} = (x_2)^4$.

   c) Es sei a eine um ihre Basis verminderte Quadratzahl, also $a = n^2 - n$ für natürliche Zahlen n. Zeigen Sie: Die Schnittpunkte zwischen p und g_a im ersten Quadranten sind $(n; n^2)$..

   d) Es sei a eine um ihre Basis verminderte Quadratzahl, also $a = n^2 - n$ für natürliche Zahlen n. g_a und p schließen eine Fläche F_a ein. Zeigen Sie:
   $F_a = \frac{(2n-1)^3}{6}$.

   e) Es sei a = 6. Die Graphen von p und g_6 schließen im zweiten Quadranten mit der negativen x-Achse eine Fläche ein, in die ein Rechteck folgendermaßen einbeschrieben werden soll: Eine Seite des Rechtecks liegt auf der x-Achse und eine weitere ist parallel zu ihr, sodass zwei Eckpunkte des Rechteck auf den Graphen von p bzw. g_6 liegen (siehe Abb. rechts). Welchen Flächeninhalt hat das flächengrößte dieser Rechtecke?

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen finden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Geradenschar, Normalparabel, Kurvenschar, Nullstellen, Umkreis

Autor: Roland Schröder

Lösung

1. a) $p(x) = g_1(x)$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die Abstände der Punkte $A(x_1;0)$ und $B(x_2;0)$ von $x = 0$ sind $|x_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $|x_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dann ist (mit $n > m$) $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. Die Gleichung $\frac{n}{m} = \frac{m+n}{n}$ lässt sich umformen zu $\frac{n}{m} = \frac{m}{n} + 1$. Hier setzen wir $\frac{n}{m}$ und $\frac{m}{n}$ ein:

$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} + 1$. Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\sqrt{5}-1\right)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 + 2\sqrt{5} + 1 \stackrel{?}{=} 5 - 2\sqrt{5} + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 + 2\sqrt{5} \stackrel{?}{=} 10 - 2\sqrt{5} \qquad \Leftrightarrow 4\sqrt{5} \stackrel{?}{=} 4 \qquad \Leftrightarrow \sqrt{5} \neq 1$$

Die Gleichung ist falsch, daher teilt der Ursprung O die Strecke AB nicht im Goldenen Schnitt.

b) Wir übernehmen x_1 und x_2 aus a) und wissen:

$$y_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ und } y_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Dann ist:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \text{ und } x_2{}^4 = y_2{}^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

c) $x^2 = x + n^2 - n$ wird zur quadratischen Gleichung: $x^2 - x - (n^2 - n)$

Mit den Lösungen: $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n}$ oder $x_1 = 1 - n$ und $x_2 = n$.

Da der Schnittpunkt im ersten Quadranten gesucht ist, heißt dieser $(n \mid n^2)$.

d) Die x-Koordinaten der Schnittpunkte werden aus c) übernommen.
Dann ist folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_{1-n}^{n} (x + n^2 - n - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + (n^2 - n)x - \frac{x^3}{3}\right]_{1-n}$$

$$= \left(\frac{n^2}{2} + (n^2 - n)n - \frac{n^3}{3}\right) - \left(\frac{(n-1)^2}{2} + \left((n^2 - n)(n-1) - \frac{(n-1)^3}{3}\right)\right)$$

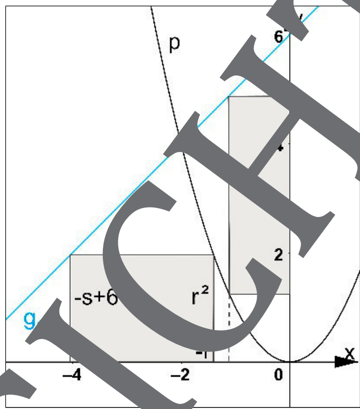
Nach einigen Umformungsschritten wird daraus:

$$\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + n - \frac{1}{6}$$

Auch der gegebene Term $\frac{(2n-1)^3}{6}$ lässt sich zu:

$\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + n - \frac{1}{6}$ umformen.

e) Wir begrenzen das Rechteck durch die Geraden mit den Gleichungen: $x = -r$ und $x = -s$.
Dann hat die gesuchte Fläche die Formel $F = (s - r) \cdot r^2$, wobei gilt: $r^2 = -s + 6$ oder $s = 6 - r^2$. Die Flächenformel als Funktion von r lautet dann:
$F(r) = -r^4 - r^3 + 6r^2$.
Das Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:
$0 = -4r^3 - 3r^2 + 12r$ oder
$0 = -4r\,(r^2 + \frac{3}{4} \cdot r - 3)$.



Von den drei möglichen Lösungen ist nur $r \approx 1{,}4$ sinnvoll.
Damit ist das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt begrenzt von der Geraden mit den Gleichungen:
$x \approx -1{,}4$ und $x \approx -4{,}0$ und dem Flächeninhalt $F(r) \approx 5{,}1$.

f) Wir begrenzen das Rechteck durch die Gerade mit der Gleichung $x = -t$. Dann hat die gesuchte Fläche die Formel $F = (6 - t - t^2) \cdot t$.
Das Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:
$0 = -3t^2 - 2t + 6$ oder
$0 = -3 \cdot (t^2 + \frac{2}{3}t - 2)$.
Nur die positive der beiden Lösungen ist sinnvoll. Diese ist $t \approx 1{,}12$. Die Gerade mit der Gleichung $x = -1{,}12$ begrenzt das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt $F(t) \approx 4{,}06$.