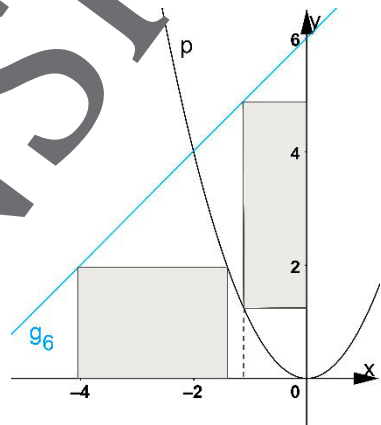


# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Analysis Sek. II



Geraden- und Kurvenschar

Verknüpfung von Analysis und Analytischer Geometrie

## Impressum

### RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60a UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen und Sie berechnen, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile davon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 1 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung und Verbreitung musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 6290-0  
Fax +49 711 6290-60  
meinRaabe@raabe.de  
www.raabe.de

Korrektur: Schirin Orth

Satz: Kaiser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe

Illustrationen: Schirin Orth

Überschweis Titel: Schirin Orth

Lektorat: Markus Hensgens

## Geraden- und Kurvenschar

### 1. Geradenschar schneidet Normalparabel

Gegeben ist eine Parabel  $p$  mit der Gleichung  $p(x) = x^2$  und für jede natürliche Zahl  $a$  eine Gerade  $g_a$  mit der Gleichung  $g_a(x) = a + x$ .

- a) Es sei  $a = 1$ .  $x_1$  und  $x_2$  seien die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte von  $p$  und  $g_1$ . Der Ursprung  $O(0;0)$  teilt die Strecke von  $A(x_1;0)$  nach  $B(x_2;0)$  im Verhältnis  $m:n$  ( $n > m$ ). Prüfen Sie, ob gilt  $\frac{n}{m} = \frac{a+n}{m}$ .  
(Man sagt:  $O$  teilt  $\overline{AB}$  im Verhältnis des Goldenen Schnittes).
- b) Es sei  $a = 1$ .  $R(x_1;y_1)$  und  $S(x_2;y_2)$  seien die Schnittpunkte von  $p$  und  $g_1$  ( $y_2 > y_1$ ). Zeigen Sie, dass gilt  $\frac{y_2}{y_1} = (x_2)^4$ .
- c) Es sei  $a$  eine um ihre Basis verminderte Quadratzahl, also  $a = n^2 - n$  für natürliche Zahlen  $n$ . Zeigen Sie: Die Schnittpunkte zwischen  $p$  und  $g_a$  im ersten Quadranten sind  $(n-1; n)$ .
- d) Es sei  $a$  eine um ihre Basis verminderte Quadratzahl, also  $a = n^2 - n$  für natürliche Zahlen  $n$  und  $p$  schließe eine Fläche  $F_a$  ein. Zeigen Sie:  
$$F_a = \frac{(2n-1)^3}{6}$$
.
- e) Es sei  $a = 6$ . Graphen von  $p$  und  $g_6$  schließen im zweiten Quadranten mit der negativen  $x$ -Achse eine Fläche ein, in die ein Rechteck folgendermaßen einbeschrieben werden soll: Eine Seite des Rechtecks liegt auf der  $x$ -Achse und eine weitere ist parallel zu ihr, sodass zwei Eckpunkte des Rechtecks auf dem Graphen von  $p$  bzw.  $g_6$  liegen (siehe Abb. rechts). Welchen Flächeninhalt hat das flächengrößte dieser Rechtecke?

### Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Analytische Geometrie
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen finden
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Geradenschar, Normalparabel, Kurvenchar, Nullstellen, Umkreis

**Autor:** Roland Schröder

### Lösung

1. a)  $p(x) = g_1(x)$  führt auf die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$  mit den Lösungen  $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  und  $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Die Abstände der Punkte  $A(x_1;0)$  und  $B(x_2;0)$  von  $x = 0$  sind  $|x_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  und  $|x_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Dann ist (mit  $n > m$ )  $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ . Die Gleichung  $\frac{n}{m} = \frac{m+n}{n}$  lässt sich

umformen  $\frac{n}{m} = \frac{m}{n} + 1$ . Hier setzen wir  $\frac{n}{m}$  und  $\frac{m}{n}$  ein:

$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} + 1$ . Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt:

$$(\sqrt{5}+1)^2 = (\sqrt{5}-1)^2 + 4$$

$$5 + 2\sqrt{5} + 1 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2\sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow 4\sqrt{5} = 4 \quad \Leftrightarrow \sqrt{5} = 1$$

Die Gleichung ist falsch, daher teilt der Ursprung  $O$  die Strecke  $AB$  nicht im Goldenen Schnitt.

- b) Wir übernehmen  $x_1$  und  $x_2$  aus a) und wissen:

$$y_1 = \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad y_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Dann ist:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2^4 = y_2^2 = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

- c)  $x^2 = x + n^2 - n$  wird zur quadratischen Gleichung  $x^2 - x - (n^2 - n)$

Mit den Lösungen:  $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n}$  oder  $x_1 = 1$  und  $x_2 = n$ .

Da der Schnittpunkt im ersten Quadranten gesucht heißt dieser  $(n \mid n^2)$ .

- d) Die x-Koordinaten der Schnittpunkte werden in (c) übernommen.  
Dann ist folgendes Integral zu berechnen.

$$\begin{aligned} & \int_{1-n}^n (x + n^2 - n - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + (n^2 - n)x - \frac{x^3}{3} \right]_{1-n}^n \\ &= \left( \frac{n^2}{2} + (n^2 - n)n - \frac{n^3}{3} \right) - \left( \frac{(n-1)^2}{2} + ((n^2 - n)(n-1)) - \frac{(n-1)^3}{3} \right) \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungsschritten wird daraus:

$$\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + n - \frac{1}{3}$$

Aus der gegebenen Term  $\frac{(2n-1)^3}{6}$  lässt sich zu:

$$\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + n - \frac{1}{3} \text{ umformen.}$$

- e) Wir begrenzen das Rechteck durch die Geraden mit den Gleichungen:

$$x = -r \text{ und } x = -s.$$

Dann hat die gesuchte Fläche die

Formel  $F = (s - r) \cdot r^2$ , wobei gilt:

$$r^2 = -s + 6 \text{ oder}$$

$$s = 6 - r^2. \text{ Die Flächenformel als}$$

Funktion von  $r$  lautet dann:

$$F(r) = -r^4 - r^3 + 6r^2.$$

Das Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:

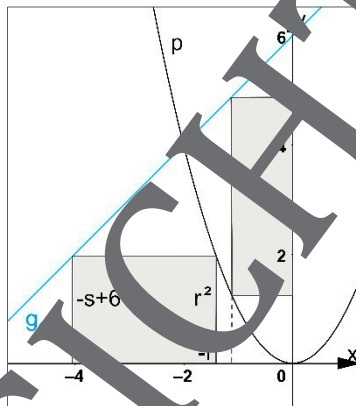
$$0 = -4r^3 - 3r^2 + 12r \text{ oder}$$

$$0 = -4r \left( r^2 + \frac{3}{4}r - 3 \right).$$

Von den drei möglichen Lösungen ist nur  $r \approx 1,4$  sinnvoll.

Damit ist das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt begrenzt von der Geraden mit den Gleichungen:

$$x \approx -1,4 \text{ und } x \approx -4,0 \text{ und hat den Flächeninhalt } F(r) \approx 5,1.$$



- f) Wir begrenzen das Rechteck durch die Gerade mit der Gleichung

$$x = -t. \text{ Dann hat die gesuchte Fläche die Formel } F = (6 - t - t^2) \cdot t.$$

Das Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:

$$0 = -3t^2 - 2t + 6 \text{ oder}$$

$$0 = -3 \cdot (t^2 + \frac{2}{3}t - 2).$$

$$0 = -3 \cdot (t^2 + \frac{2}{3}t - 2).$$

$$0 = -3 \cdot (t^2 + \frac{2}{3}t - 2).$$

$$0 = -3 \cdot (t^2 + \frac{2}{3}t - 2).$$

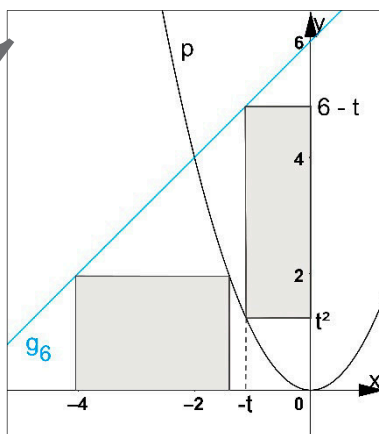
Nur die positive der beiden Lösungen ist sinnvoll. Diese ist  $t \approx 1,12$ .

Die Gerade mit der Gleichung

$$x \approx -1,12 \text{ begrenzt das Rechteck}$$

mit maximalem Flächeninhalt

$$F(t) \approx 4,06.$$



## **Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**