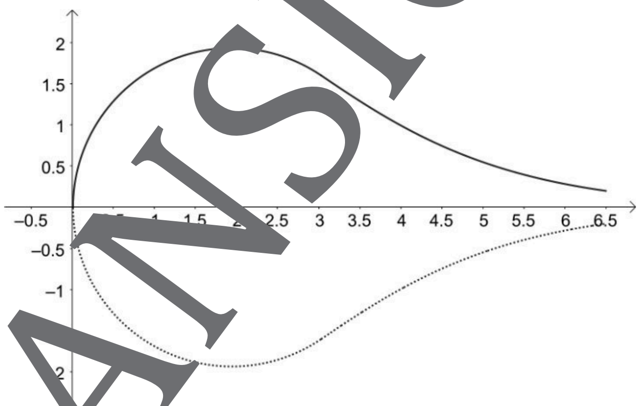
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Berechnungen am Rotationskörper

Volumen und Mantelfläche bestimmen

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Berechnungen am Rotationskörper

Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{1-x}$; $0 \le x \le 6{,}5$.

Rotiert der Graph der Funktion f um die x-Achse, so entsteht der Innenraum eines kolbenförmigen Gefäßes (siehe Abbildung 1); $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$

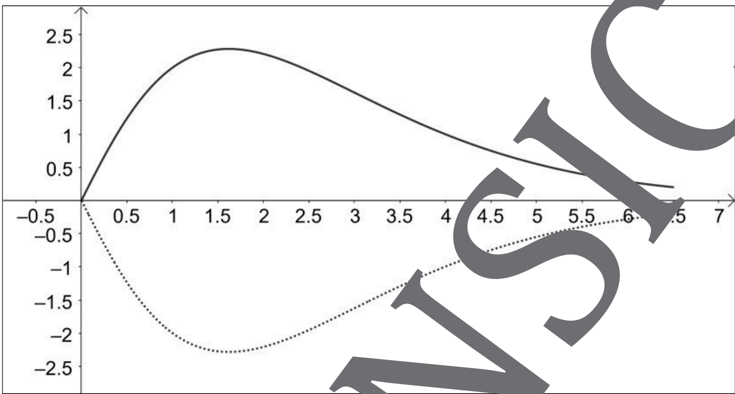


Abb. 1

1. a) Bestimmen Sie den maximalen Durchmesser und die Breite der Öffnung des Gefäßes.

   b) Das Gefäß kann bis zu einer Höhe von 6 cm gefüllt werden. Berechnen Sie die Füllmenge (in ml) für ein volles Gefäß.

Tippkarte

Rotationskörper

Rotiert der Graph einer Funktion f über dem Intervall [a; b] um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

und der Mantelfläche:

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx$$

Kreisgleichung

Ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(x_M \mid y_M)$ hat die Kreisgleichung:

$$(x - x_m)^2 + (x - y_m)^2 = r^2$$

Kugelsegment

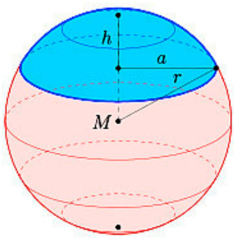
Ein Kugelsegment habe den Radius r sowie den Grundkreisradius a und die Höhe des Segments sei h (siehe nebenstehende Abbildung). Das Volumen eines Kugelsegments lässt sich dann nach der Formel:

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) \text{ oder } V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot \left(3a^2 + h^2\right),$$

die Mantelfläche (Kugelkappe) nach der Formel:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot \left(a^2 + h^2\right)$$

berechnen.



Ag2gaeh/Kugelkappe, Kugelsegment/
Wikimedia Commons – CC BY-SA 2.0.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: Lösungen vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln und vergleichen
- Medien: GTR/CAS
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Exponentialfunktion, knickfrei, Extrempunkt, Rotationskörper (Volumen und Mantelfläche), Kugelsegment (Volumen und Mantelfläche), Prozentrechnung

Autor: Günther Weber

Didaktisch-methodische Anmerkungen

Insbesondere bei leistungsschwächeren Kursen bietet es sich an, die Vorüberlegungen zum Lösungsweg im Unterrichtsgespräch zu erarbeiten. Zeitgleich kann dann die Konstruktion mit Geogebra oder Euklid-Dynageo durchgeführt werden.

Nach der Konstruktion ist eine Lösung durch Variation der Variablen möglich. Dies ist vorteilhaft, da man erkennt, dass es 2 Lösungen bei Aufgabe 2 gibt.

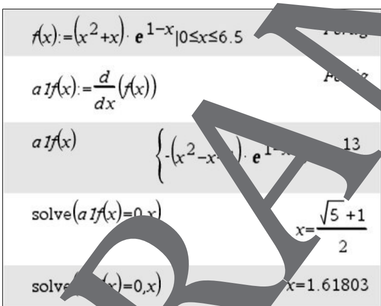
Aufgabe 3 kann arbeitsteilig von 2 Gruppen gelöst werden; jede Gruppe arbeitet mit einer der in Aufgabenteil 2 gefundenen Lösungen.

Zur Differenzierung nach Leistungsstärke können die Formeln für das Kugelsegment aus den Formeln für den Rotationskörper hergeleitet werden. Zudem kann eine Stammfunktion zur Funktion $g(x) = (f(x))^2$ bestimmt werden.

Lösung

1. a) Der maximale Durchmesser entspricht dem Doppelten des absoluten Maximums im Definitionsbereich. Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist: f '(x) = 0. Eine Ableitung der Funktion f mit Hilfe der Ketten- und Produktregel ergibt:

$$f'(x) = (2x+1)\cdot e^{1-x} + (x^2+x)\cdot\left(-e^{1-x}\right)$$
$$= e^{1-x}\cdot\left(-x^2+x+1\right)$$
$$e^{1-x}\cdot\left(-x^2+x+1\right) = 0 \qquad |:\left(-e^{1-x}\right)\neq 0$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}$$
$$x_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,62;\ x_1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \neq D$$



Hinreichende Bedingung für eine Maximumstelle: f '(x) = und f ''(x)< 0.

$$f''(x) = (-2x+1)\cdot e^{1-x} + (-x^2+x+1)\cdot\left(-e^{1-x}\right)$$
$$= e^{1-x}\cdot\left(x^2-3x\right)$$
$$= e^{1-x}\cdot x\cdot(x-3)$$
$$f''(x) = e^{-0,62}\cdot 1,62\cdot(-1,38) < 0$$

An der Stelle $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,62$ liegt ein relatives Maximum vor.

Die Vorüberlegungen können mit Geogebra veranschaulicht werden:

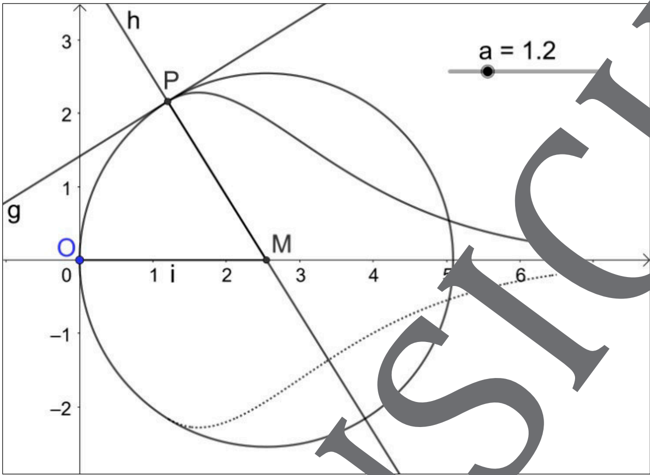


Abb. 3

Die folgende Tabelle zeigt die Konstruktionsschritte:

a = 1.2

0 5

$f(x) = \text{Wenn}(a \leq x \leq 6.5, (x^2 + x)\, e^{1-x})$

$\rightarrow \; (x^2 + x)\, e^{1-x}, \quad (1.2 \leq x \leq 6.5)$

$f_1 = \text{Spiegle}(f, \text{xAchse})$

$\rightarrow \; x$ [illegible]
$y = -\text{W}$[illegible]$(1.2 \leq t \leq 6.5, (t^2 + t)\, e^{1-t})$

[illegible]

$P = (a, f(a))$

$\rightarrow \; (1.2,\ 2.161)$

$g:$ [illegible]

$\rightarrow \; y = 0.622x + 1.415$

$h:$ Senkrechte(P, g)

$\rightarrow \; x - 0.622y = -2.545$

$M = \text{Schneide}(h, \text{xAchse})$

$\rightarrow \; (2.545,\ 0)$

$i: \text{Strecke}(O, M)$

$\rightarrow \; 2.545$

$j: \text{Strecke}(P, M)$

$\rightarrow \; 2.546$

$c: \text{Kreis}(M, P)$

$\rightarrow \; (x - 2.545)^2 + y^2 = 6.481$

3. a) Die Kreisgleichung k für einen Kreis mit dem Mittelpunkt M (r | 0) und dem Radius r lautet:

$$k(x) = \sqrt{2rx - x^2} = \left(2rx - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Eine Ableitung mithilfe der Potenz- und Kettenregel lautet:

$$k'(x) = \frac{1}{2}(2r - 2x)\cdot\left(2rx - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r - x}{\left(2rx - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Einsetzen von $a_1 = 1{,}2$ ($a_2 = 3{,}03$) und $r_1 = 2{,}54$ ($r_2 = 1{,}95$) in die Mantelformel für das Kugelsegment bzw. in die Mantelflächenformel für den Rotationskörper im Intervall $[0\,;\,a_1]$ ($[0\,;\,a_2]$) liefert die Größe der Mantelfläche.

$a1$	1.2
$r1:=2.54$	2.54
$m1:=2\cdot\pi\cdot r1\cdot a1$	19.1511
$a1k1(x):=\frac{d}{dx}(k1(x))$	*Fertig*
$2\cdot\pi\cdot\int_0^{a1}\left(k1(x)\cdot\sqrt{1+(a1k1(x))^2}\right)dx$	19.1511

$a2$	3.03
$r2:=1.95$	1.95
$m2:=2\cdot\pi\cdot r2\cdot a2$	37.1242
$a1k2(x):=\frac{d}{dx}(k2(x))$	*Fertig*
$2\cdot\pi\cdot\int_0^{a2}\left(k2(x)\cdot\sqrt{1+(a1k2(x))^2}\right)dx$	37.1242

Die Mantelfläche des Kugelsegments hat eine Größe von 19,15 cm² bzw. von 37,12 cm².

b) Das Kugelsegment von Gefäß 1 ($a_1 = 1{,}2$, $r_1 = 2{,}54$) hat ein Volumen von 9,73 cm³. Das Gesamtvolumen des Gefäßes beträgt 42,13 cm³. Da die Hälfte des Volumens größer als die Hälfte des Gesamtvolumens ist, muss die Markierung m auf der Mantelfläche des Rotationskörpers angebracht werden.

$\frac{v1}{2}$	21.0665
$\frac{v1}{2}-v1\_ks$	11.3631
$\text{solve}\left(\pi\cdot\int_{a1}^{m}(f(x))^2\,dx=\frac{v1}{2}-v1\_ks,m\right)$	$m=1.91203$