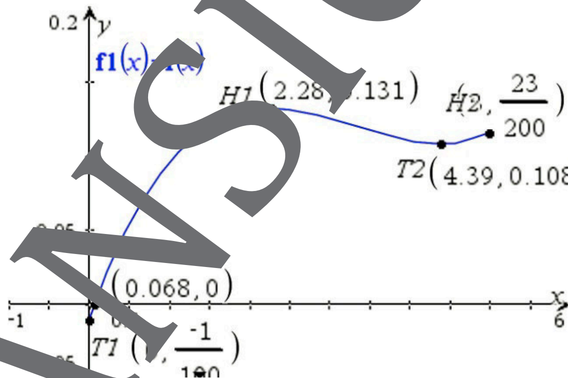
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Eine Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge

RAABE KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Eine Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Mathematische Grundlagen

Unter einer **ganzrationalen** Funktion (oder Polynomfunktion) vom **Grad** n versteht man eine Funktion der Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0,\ n \in \mathbb{N},$$
$$a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$$

Die Zahlen a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 heißen **Koeffizienten**. Ohne Einschränkung des Definitionsbereichs gilt $D = \mathbb{R}$.
Die Ableitung ganzrationaler Funktionen kann mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel gebildet werden. Die Ableitung ermöglicht es, Funktionen auf bestimme Eigenschaften zu untersuchen und Rückschlüsse über den Verlauf des Graphen zu ziehen.

Die **Monotonie** beschreibt das Steigungsverhalten einer Funktion f.
Ist $f'(x) < 0$ für jeden Punkt eines Intervalls I so fällt der Graph der Funktion streng monoton im Intervall I,
ist $f'(x) > 0$ für jeden Punkt eines Intervalls I so steigt der Graph der Funktion streng monoton im Intervall I.

Extremstellen (Minimum- oder Maximumstellen) sind Stellen (x-Werte), an denen der Graph einer Funktion die Steigung null hat (notwendige Bedingung für Extremstellen); der Graph besitzt an der Stelle somit eine waagerechte Tangente. Zudem ändert sich an diesen Stellen das Monotonieverhalten.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$f'(a) = 0$ und $f'(a)$ wechselt bei x = a von – nach +: relatives/lokales **Minimum** bei x = a (Tiefpunkt)

$f'(a) = 0$ und $f'(a)$ wechselt bei x = a von + nach –: relatives/lokales **Maximum** bei x = a (Hochpunkt)

Den tiefsten (höchsten) Punkt des Graphen nennt man absoluten/globalen Tiefpunkt (Hochpunkt).

Ist $f'(a) = 0$ und es liegt bei x = a kein Vorzeichenwechsel vor, so liegt bei x = a ein **Sattelpunkt** vor.

Übungen zu ganzrationalen Funktionen

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, sodass der Verlauf des Graphen (Extrempunkte; Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten für betragsgroße x) „gut“ zu erkennen ist. Geben Sie die Nullstellen und die Extrempunkte an; unterscheiden Sie zwischen lokalen (relativen) und globalen (absoluten) Extrempunkten.

   a) $f(x) = \frac{1}{200} \cdot \left(x^3 - 10x^2 + 30x - 2\right);\ x \in [0;5]$

   b) $g(x) = 6{,}75x^3 - 80x^2 + 250x + 120$

2. Gegeben sind die Funktionen:

   $f(x) = \frac{16}{9}x^3 - \frac{56}{3}x^2 + \frac{160}{3}x - \frac{254}{9}$

   $g(x) = \frac{16}{9}x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{70}{9}$

   $h(x) = -\frac{16}{27}x^3 + 8x^2 - 32x + 27$

   a) Ermitteln Sie, durch welche Verschiebungen in Richtung der x- bzw. y-Achse der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht. Geben Sie den Funktionsterm der Funktion g mithilfe der Funktion f an.

   b) Der Graph der Funktion h ist durch eine Stauchung, eine Verschiebung in Richtung der x-Achse und durch eine Spiegelung an einer Koordinatenachse aus dem Graphen der Funktion f hervorgegangen. Bestimmen Sie diese Umformungen. Geben Sie den Funktionsterm der Funktion h mithilfe der Funktion f an.

3. a) Bestimmen Sie rechnerisch die Extrempunkte der Funktion

   $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right)$

   b) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion

   $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 10,\ x \in [-1;5]$

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: –
- Kommunikation: Lösungen vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln und vergleichen
- Medien: GTR, WTR oder alternative digitale Mathematikwerkzeuge, wie z. B. GeoGebra; Farbfolie
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: ganzrationale Funktion, Extrempunkte, Monotonie, Veränderungen am Graphen, Extremwertaufgabe, mittlere und momentane Änderungsrate

Autor: Günther Weber

Methodisch-didaktische Hinweise

Die Untersuchung der ganzrationalen Funktionen richtet sich vorwiegend nach dem Lehrplan der Einführungsphase Nordrhein-Westfalen. Die 2. Ableitung und Wendestellen werden hier noch nicht behandelt. Ggf. kann die Lehrkraft die Aufgabenstellung als Differenzierung dahingehend erweitern. Ebenfalls werden vorwiegend ganzrationale Funktionen 3. Grades untersucht.

Für die Rechnungen und die Grafiken wurde der TI-nSpire CX benutzt. Die Screenshots beziehen sich somit auf diesen GTR. Die Befehle sind, sofern sie nicht aus der Beschreibung des Lösungsweges hervorgehen, meistens selbsterklärend und können so auf andere GTR leicht übertragen werden. Zu beachten ist, dass man, falls es mehrere Lösungen einer Gleichung gibt, den Befehl „nsolve()“ mithilfe eines angegebenen Startwertes oder durch Einschränkung des Lösungsbereichs „steuern“ muss.

Die rechnerische Lösung kann bei vielen Aufgaben auch mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) erfolgen, denn diese bieten sehr oft die Möglichkeit, lineare (quadratische, kubische) Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen. Viele WTR bieten zudem einem Solver zur numerischen Lösung von Gleichungen.

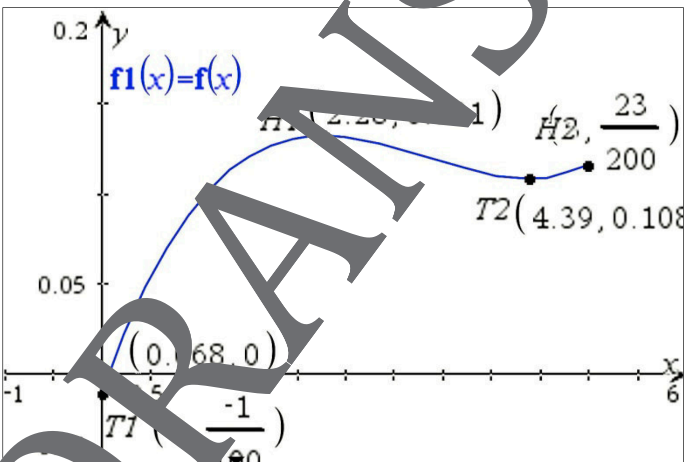
Lösung

1. Standardmäßig zeigt das Grafikfenster nur einen kleinen Ausschnitt (insbesondere für die Funktionswerte) an, sodass der Graph evtl. erst durch Änderung der Fenstereinstellungen gut sichtbar ist.

   a) Vorüberlegungen vor dem Zeichnen:
   Die x-Werte sollten in etwa dem Definitionsbereich entsprechen. Der Faktor $\frac{1}{200}$ bedeutet, dass die y-Werte „stark" gestaucht werden.

   Mögliche Fenstereinstellungen für die Funktion f:

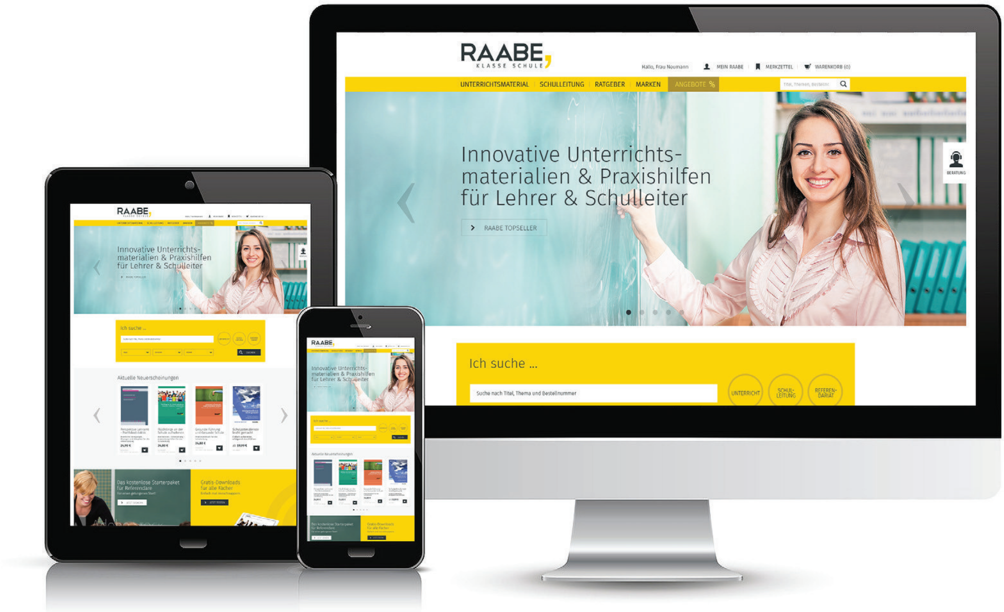
X_{Min}	X_{Max}	X-Skala	Y_{Min}	Y_{Max}	Y-Skala
–1	6	0,5	-0,05	0,2	0,05



Die Nullstelle liegt bei x = 0,068. Die Extrempunkte sind $T1\ (0\,|\,-\frac{1}{100})$ (absolutes Randminimum), $H1\ (2{,}28\,|\,0{,}131)$ (absoluter Hochpunkt), $T2\ (4{,}39\,|\,0{,}108)$ (lokaler Tiefpunkt) und $H2\ (5\,|\,\frac{23}{200})$.

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de