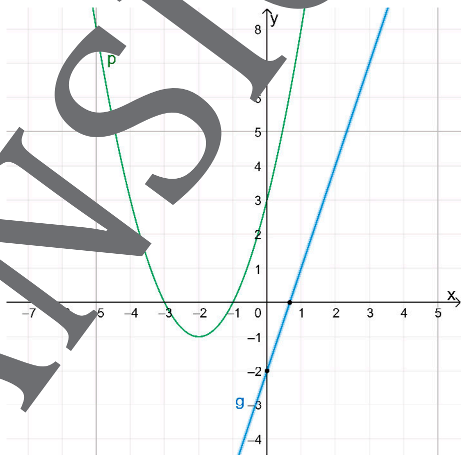
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Verkettung von Funktionen

Parabel und Gerade

RAABE KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Korrektorat: Markus Hensgens

Verkettung von Funktionen

Gegeben sind die Graphen einer Parabel p und einer Geraden g im Koordinatensystem.

1. Eine Zuordnung f wird durch folgendes Vorgehen festgelegt:
   Zu jeder Stelle $\overline{x}$ auf der x-Achse wird zunächst der Punkt $P(\overline{x}\,|\,p(\overline{x}))$ auf der Parabel aufgesucht. Von P aus wird auf einer Parallelen zur x-Achse zu einem Punkt Q der Geraden g weitergegangen, und von Q aus parallel zur y-Achse bis zur x-Achse. Für die so erreichte Stelle $\overline{\overline{x}}$ gelte $\overline{\overline{x}} = f(\overline{x})$. Wie lautet die Zuordnungsgleichung von f?

2. Ist f eine Funktion? Begründen Sie.

3. Gegeben sind die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = x^2 + 4x + 3$ und die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = 3x$ [illegible] 2.
   Bestimmen Sie den Scheitelpunkt S der Parabel p und den Extrempunkt E der Zuordnung f (siehe Aufgabe 1).

4. Zeigen Sie: Für jedes Paar $(p\,|\,g)$ haben der Scheitelpunkt S der Parabel p und der Extrempunkt E der Zuordnung f (siehe Teilaufgabe 1) die gleiche x-Koordinate.

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: argumentieren, begründen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden; Beweis führen
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzel- oder Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Parabel, Gerade, Graph, lokales Extremum

Autor: Roland Schröder

Lösung

1. Wenn man von $P(\bar{x} \mid p(\bar{x}))$ laut Anweisung weiter geht, gelangt man zum Punkt $Q(\bar{\bar{x}} \mid p(\bar{x}))$. Der Weg endet dann an der Stelle $\bar{\bar{x}}$ auf der x-Achse. Dabei ist $\bar{\bar{x}} = g^{-1}(p(\bar{x}))$.
   Dann ist wegen $\bar{\bar{x}} = f(\bar{x})$:
   $f(\bar{x}) = g^{-1}(p(\bar{x}))$

2. Da p eine Funktion auf der Menge der reellen Zahlen ist, findet man zu jeder Stelle $\bar{x}$ genau ein $p(\bar{x})$. Die Umkehrrelationen von linearen Funktionen sind wieder Funktionen, also ist $g^{-1}(p(\bar{x}))$ eindeutig bestimmt.
   Folglich ist f mit $f(\bar{x}) = g^{-1}(p(\bar{x}))$ eine Funktion.

3. Die Umkehrung von $y = 3x - 2$ erhält man, wenn man x und y vertauscht und wieder nach y auflöst. $x = 3y - 2$ aufgelöst nach y ergibt:
   $y = \frac{1}{3} \cdot (x + 2)$
   Also ist: $g^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot (x + 2)$.
   Dann gilt: $g^{-1}(p(\bar{x})) = \frac{1}{3} \cdot ((\bar{x}^2 + 4\bar{x} + 3) + 2) = \frac{1}{3} \cdot (\bar{x}^2 + 4\bar{x} + 5)$.
   Also ist: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 4x + 5)$.

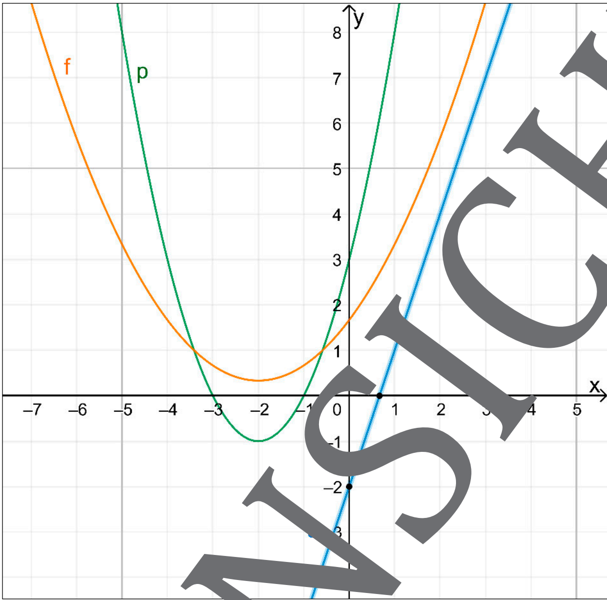


Abb. 1

Den Scheitelpunkt S der Parabel p findet man entweder über die Scheitelform $p(x) = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$ oder über die Nullstelle der ersten Ableitung $2x + 4 = 0$, also $x = -2$ und dann ist:
$S(-2\,|\,-1)$.

Den Extrempunkt der Zuordnung f findet man nach den gleichen Strategien, zum Beispiel $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2x+4)$ mit der Nullstelle $x = -2$ und der zugehörigen y-Koordinate $\frac{1}{3} \cdot (4 - 8 + 5) = \frac{1}{3}$. Also ist:

$E\left(-2 \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$.