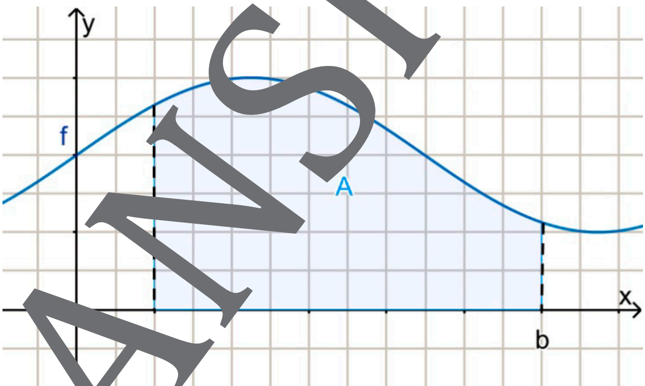
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Integration durch Substitution und partielle Integration

Integrationsverfahren trainieren

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Korrektorat: Markus Hensgens

Integration durch Substitution und partielle Integration

1 Wiederholung von Integrationsbeispielen

1.1 Mithilfe der Grundformeln

Bei der Betrachtung der Integration als Summe von Teilflächen unter einer Kurve y = f (x) ergaben sich folgende vier Grundformeln, wobei bei den Funktionen nur die Stetigkeit vorausgesetzt wird.

(1) $\int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

(3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

(4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Beispiele

I. $\int \left(x^2 + 3x - 2 \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c$

II. $\int \frac{x}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x + \ln|x-1| + c$

III. $\int \frac{x^3}{x+1} dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + c$

1.2 Mithilfe bekannter Formeln

Aus $\int f'(x)dx = f(x) + c$ folgen:

(1) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(2) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

Beispiele

I. $\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax)+c$

II. $\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax)+c$

III. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+c$

1.3 Mit der Umkehrung der logarithmischen Differentiation

Es gilt folgende Grundregel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$$

Beispiele

I. $\int \frac{2}{2x+3}dx = \ln|2x+3|+c$

II. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-8}dx = \ln|x^2+5x-8|+c$

III. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1}+c$

IV. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+c$

V. $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|+c$

VI. $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x|+c$

2 Integration durch Substitution

Die Integration durch Substitution beruht auf der Umkehrung der Kettenregel. Man versucht unter dem Integralzeichen eine bekannte integrierbare Funktion zu erhalten. Dies ist häufig erst durch eine Transformation herbeizuführen. Man setzt x = g (z) und wandelt den Integranden so um, dass eine leicht zu integrierende Funktion entsteht. Es gilt folgender Satz:

Satz

f sei in einem Intervall I_1 stetig und g in einem Intervall I_2 mit g $(I_2) \subseteq I_1$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{dz} = \int f(z)dz \quad \text{mit } z = g\,(x)$$

Durch die Substitution z = g (x) ändern sich die Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Beispiele

I. $\int (\sin x)^2 \cos x dx =$

---

z = sin x, z′ = cos x

$$= \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + c = \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

Die hier verwendete Regel ist nur dann handlich, wenn neben f (g (x)) auch noch g′(x) im Integranden steht. Wesentlich häufiger wird die Regel in ihrer Anwendung von „rechts nach links“ gebraucht. Man substituiert z so, dass man eine einfachere, leicht integrierbare Funktion erhält.
Fortführung der Beispiele:

VIII. Das „Kreisintegral“:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$x = r \cdot \sin z \Rightarrow dx = r \cdot \cos z\, dz$ ($z = \arcsin \frac{x}{r}$)

Verwendet wird: $\cos 2z = 2(\cos z)^2 - 1 \Rightarrow (\cos z)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2z$

$$= \int \sqrt{r^2 - r^2 \cdot (\sin z)^2} \cdot r \cdot \cos z\, dz = \int r^2 (\cos z)^2\, dz =$$

$$= r^2 \left(\frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \sin z \cdot \cos z\right) + c = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + c$$

Die Fläche des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ erhält man wie folgt über der Fläche des Viertelkreis $y = \sqrt{r^2 - x^2}$:

$$A_{\text{Kreis}} = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r$$

$$= 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin 1 = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = r^2 \pi \text{ FE}$$

Aufgaben

7. Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode die folgenden Integrale.

   a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\,dx \quad (z = e^x)$

   b) $\int x e^{ax^2}\,dx \quad (z = ax^2)$

   c) $\int \sin x \cdot e^{a \cdot \cos x}\,dx \quad (z = a \cdot \cos x)$

   d) $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx \quad (z = e^x + 1)$

8. Berechnen Sie die Integrale mithilfe der Substitutionsmethode.

   a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad \left(z=\sqrt{x-1}\right)$

   b) $\int \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx \quad \left(z=\sqrt{e^x-1}\right)$

   c) $\int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx \quad \left(z=1-x^2\right)$

   d) $\int \frac{x}{(1-x)^2}\,dx \quad (z=1-x)$

3 Die partielle Integration

Dieses Integrationsverfahren beruht auf der Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Falls die Ableitungsfunktionen u' und v' in einem Intervall I stetig sind, kann die obige Gleichung wie folgt integriert werden:

$$\int [u(x)\cdot v(x)]'dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Daraus ergibt sich folgende Integrationsregel:

Integrationsregel

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

oder:

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Man integriert nur teilweise (partiell). Auch hier integriert man auch zuerst unbestimmt und setzt dann erst die jeweiligen Grenzen ein.

4 Anwendungen der Integralrechnung

4.1 Flächenberechnungen

Ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer Funktion f, die im Intervall $I = [a\,;\,b]$ stetig und positiv ist, kann gedeutet werden als Fläche unter dem Graphen G_f mit der x-Achse in I.

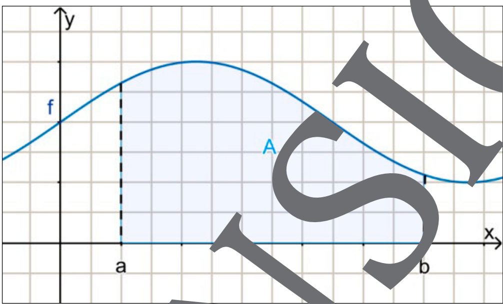


Abb. 1

Beispiele

I. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 1}$

Fläche A mit der x-Achse zwischen
$x = -4$ und $x = 0$.

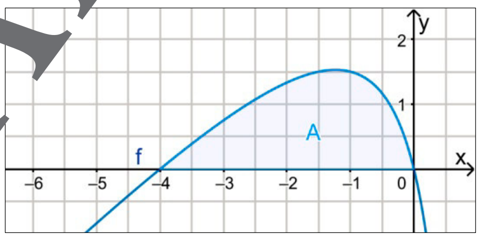


Abb. 2

Lösung

$$A = \int_{-4}^{0} \frac{x^2 + 4x}{x - 1}\,dx = \int_{-4}^{0} \left(x + 5 + \frac{5}{x - 1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 5x + 5 \cdot \ln|x - 1| \right]_{-4}^{0}$$

$$= 0 - (8 - 20 + 5\ln 5) = 12 - 5\ln 5 \approx 3{,}95 \text{ FE}$$

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: berechnen und begründen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Lösungsstrategie entwickeln
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzel-/Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Integration mithilfe der Grundformeln, mit der Umkehrung der logarithmischen Differentiation, Aufspaltung in Partialbrüche, Integration durch Substitution, partielle Integration, Flächenberechnungen, Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers, Länge eines Kurvenbogens

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. a) $\int_0^2 |x|\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$

   b) $\int_{-2}^2 |x|\,dx = 2\cdot\int_0^2 x\,dx = 2\cdot 2 = 4$

   c) $\int_{-2}^2 x\,dx = 0$, da die Funktion $y = x$ und die Integrationsgrenzen symmetrisch zum Ursprung sind.

2. a) $\int \frac{2}{3x^3}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int \frac{1}{x^5}\,dx = -\frac{2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^4} + c = -\frac{1}{6x^4} + c$

   b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

   c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$

d) $\int \frac{1}{20-12x+9x^2}\,dx = \int \frac{dx}{4^2+(3x-2)^2}$

$$= \frac{1}{4\cdot 3}\arctan\frac{3x-2}{4} + c = \frac{1}{12}\arctan\frac{3x-2}{4} + c$$

3. a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$, da sowohl der Sinus als auch die Integrationsgrenzen punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \left[\ln\left|\sin x\right|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\sqrt{3} \approx 0,55$

4. a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-7}\,dx = \ln\left|x^2+3x-7\right| + c$

b) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = e^{-\frac{1}{x}} + c$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left|e^x+1\right| + c = \ln\left(e^x+1\right) + c$

d) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln\left|e^x + e^{-x}\right| + c = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + c$

5. a) $\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + c$

b) $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + c$