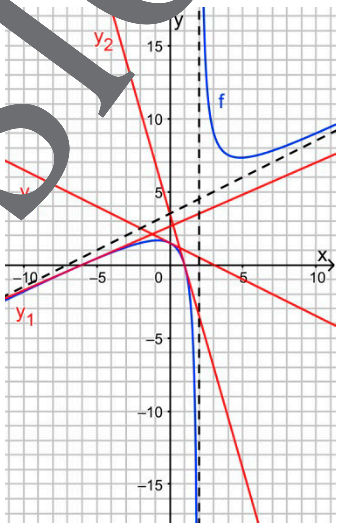
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Unendliche Variantenvielfalt anhand von gebrochenrationalen Funktionen

Mathematische Regeln wiederholen, üben und anwenden

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Korrektorat: Christin Wollert

Unendliche Variantenvielfalt anhand von gebrochenrationalen Funktionen

In diesem Beitrag sind die gebrochenrationalen Funktionen der Form

$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ Gegenstand umfangreicher Betrachtungen.

Ziel des Beitrags ist es, die grenzenlose Fülle der sich daraus ergebenden Möglichkeiten zur Wiederholung, Übung und Anwendung mathematischer Regeln, Algorithmen und Berechnungen in der Differential- und der Integralrechnung darzustellen und ihre Nutzung im Unterricht anzuregen.

Dabei werden für die Funktionen 1–6 die Parameterwerte a–e angegeben, so dass die geforderten verschiedenen Eigenschaften und Kenngrößen der Funktionen unmittelbar angegeben, geprüft bzw. berechnet werden können. In den Aufgabenblättern sind die Parameterwerte bzw. Kenngrößen der Funktionen angegeben und Felder zum Eintragen der Ergebnisse vorbereitet.

Alle Aufgaben können ohne Zuhilfenahme eines CAS bearbeitet werden. Andererseits erleichtert die Nutzung eines CAS insbesondere das Bilden der Ableitungsfunktionen, die Berechnung lokaler Extrema, das Lösen entsprechender Gleichungssysteme, die Flächeninhaltsberechnungen sowie die grafische Darstellung der Funktionen, der Tangenten und der Asymptoten im kartesischen Koordinatensystem.

Mithilfe der Farbfolie können Sie die grafische Lösung der ersten Funktion beispielhaft im Plenum besprechen.

Aufgabe

Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion mit den Parametern a–e in der Form

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}; \; a \neq 0; \, d \neq 0$$

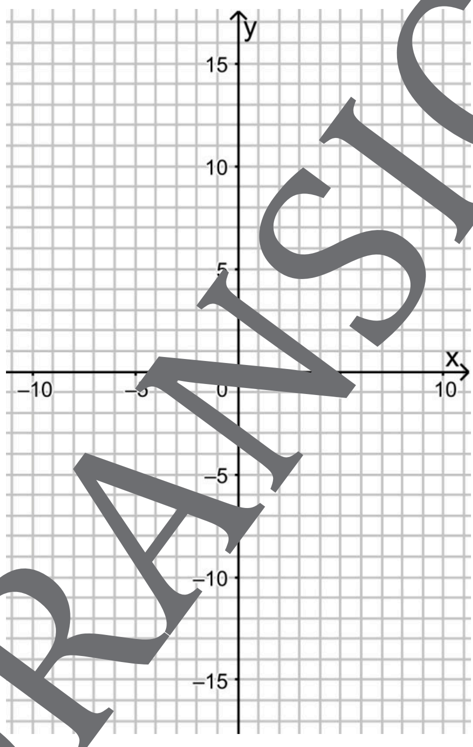
Vervollständigen Sie die Angaben auf dem Arbeitsblatt. Stellen Sie den Graphen der Funktion f(x), die Tangenten und die Asymptoten im kartesischen Koordinatensystem des Arbeitsblattes dar.

Legende

f, f', f''	Funktion; 1. und 2. Ableitungsfunktion
$x_1; x_2$	Nullstellen der Funktion
$S_{x1}; S_{x2}; S_y$	Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit den Koordinatenachsen
$m_{x_1}; m_{x_2}; m_y$	Anstieg des Graphen der Funktion in $S_{x1}; S_{x2}; S_y$
$y_1; y_2; y_3$	Tangenten an den Graphen der Funktion in $S_{x1}; S_{x2}; S_y$
$\alpha_{x_1}; \alpha_{x_2}; \alpha_y$	Schnittwinkel der Tangenten $y_1; y_2; y_3$ mit der x-Achse
s_t	Schnittpunkt der Tangenten $y_1; y_2$
α_t	Schnittwinkel der Tangenten $y_1; y_2$

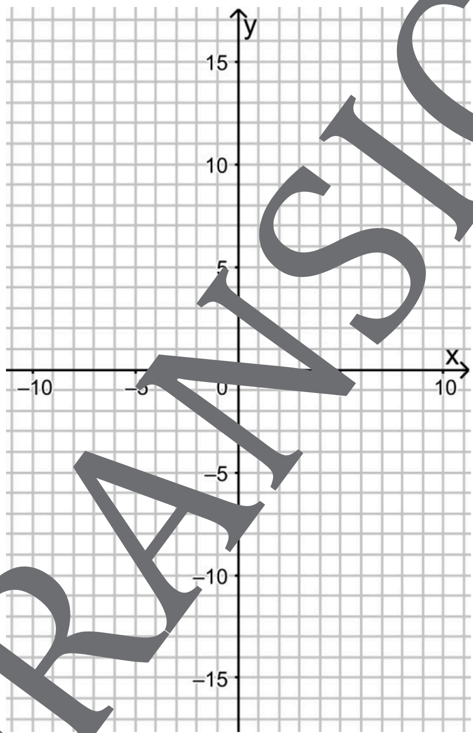
Funktion				
a =	b =	c =	d =	e =

f(x) =	f '(x) =	f ''(x) =

Def.bereich:		Wertebereich:
S_{x_1} (| 0)		S_{x_2} (| 0)
m_{x_1} =		m_{x_2} =
α_{x_1} =		α_{x_2} =
Tangente in S_{x_1} y_1 =		Tangente in S_{x_2} y_2 =
S_y (| 0)		m_y =
Tangente in S_y y_3 =		α_3 =
S_t (|)		α_t =
Asymptote in x_p x =		Asymptote schräg y =
Lok. Min. E_{min} (|)		Lok. Max. E_{max} (|)

Symmetrie:	Polstelle: x_p =	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = f(x) =$

Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall $[x_1; x_2]$ A = FE

<table>
<tr><td colspan="3">Funktion 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">a = 1 | b = 5 | c = –6 | d = 2 | e =</td></tr>
<tr><td>f(x) =</td><td>f '(x) =</td><td>f ''(x) =</td></tr>
<tr><td>Def.bereich:</td><td rowspan="11"></td><td>Wertebereich:</td></tr>
<tr><td>S_{x_1} (| 0)</td><td>S_{x_2} (| 0)</td></tr>
<tr><td>m_{x_1} =</td><td>m_{x_2} =</td></tr>
<tr><td>α_{x_1} =</td><td>α_{x_2} =</td></tr>
<tr><td>Tangente in S_{x_1}
y_1 =</td><td>Tangente in S_{x_2}
y_2 =</td></tr>
<tr><td>S_y (| 0)</td><td>m_y =</td></tr>
<tr><td>Tangente in S_y
y_3 =</td><td>α_3 =</td></tr>
<tr><td>S_t (|)</td><td>α_t =</td></tr>
<tr><td>Asymptote in x_p
x =</td><td>Asymptote schräg
y =</td></tr>
<tr><td>Lok. Min.
E_{min} (|)</td><td>Lok. Max.
E_{max} (|)</td></tr>
<tr><td>Symmetrie:</td><td>Polstelle: x_p =</td><td>$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = f(x) =$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall [x_1; x_2]
A =   FE</td></tr>
</table>

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend; weiterführend
- Fachlicher Bezug: Infinitesimalrechnung (gebrochen-rationale Funktion)
- Kommunikation: darstellen; untersuchen; begründen
- Problemlösen: Wissen reproduzieren, Zusammenhänge erkennen, Anwendung bekannter Lösungsverfahren, Mathematisch-logisches Denken entwickeln, Berechnungen
- Modellierung: Folie
- Medien: evtl. CAS
- Methode: Reaktivierung, Einzel-, Partner-, Kleingruppenarbeit, Entwicklung der Kreativität und der Transferfähigkeit
- Inhalt in Stichworten: Graphische Darstellung, Definitionsbereich, Wertebereich, Ableitungsfunktion, Nullstelle, Anstieg, Tangente, Schnittwinkel, Symmetrie, Polstelle, Grenzwert, Polynomdivision, Asymptote, Lokale Extrema, Schnittpunkt, Lösen von Gleichungssystemen, Flächeninhaltsberechnungen

Autor: Wolfgang Lübbe

Lösung

Zunächst werden einige Überlegungen für die Funktion:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

dargestellt.

Definitionsbereich

$$dx + e \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R},\ x \neq -\frac{e}{d}$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Funktion 1

$$f(x)=\frac{x^2+5x-6}{2x-4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+5)\cdot(2x-4)-(x^2+5x-6)\cdot 2}{(2x-4)^2}$$

$$=\frac{2x^2-8x-8}{(2x-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x-8)\cdot(2x-4)^2-(2x^2-8x-8)\cdot 2\cdot(2x-4)\cdot 2}{(2x-4)^4}$$

$$=\frac{64}{(2x-4)^3}$$

Nullstellen

$$x^2+5x-6=0$$

$$x_{1;2}=-2,5\pm\sqrt{6,25+6}\ \rightarrow\ x_1=-6\ ;x_2=1$$

Anstieg in S_{x_1} und S_{x_2}

$$m_{x_1}=f'(x_1)=\frac{2\cdot(-6)^2-8\cdot(-6)-8}{(2\cdot(-6)-4)^2}=\frac{7}{16}$$

$$m_{x_2}=f'(x_2)=\frac{2\cdot 1^2-8\cdot 1-8}{(2\cdot 1-4)^2}=-\frac{7}{2}$$

Schnittwinkel in S_{x_1} und S_{x_2}

$$m_{x_1}=\tan\alpha_{x_1}=\frac{7}{16}\rightarrow\alpha_{x_1}\approx 23,6^\circ$$

$$m_{x_2}=\tan\alpha_{x_2}=-\frac{7}{2}\rightarrow\alpha_{x_2}\approx 105,9^\circ$$

Tangenten in S_{x_1} und S_{x_2}

$$0=\frac{7}{16}\cdot(-6)+n$$

$$\frac{21}{8}=n \qquad \rightarrow y_1=\frac{7}{16}x+\frac{21}{8}$$

$$0=-\frac{7}{2}\cdot 1+n$$

$$\frac{7}{2}=n \qquad \rightarrow y_2=-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}$$

Anstieg in S_y:

$$m_y=f'(0)=\frac{-8}{(-4)^2}=-\frac{1}{2}$$

Schnittwinkel α_3

$$m_y=\tan\,\alpha_3=-\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \alpha_3\approx 153{,}4°$$

Schnittpunkt der Tangenten y_1 und y_2

$$\tan a_t=\left|\frac{-\frac{7}{2}-\frac{7}{16}}{1+\frac{7}{16}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}\right|=\frac{126}{17} \qquad \rightarrow \alpha_t\approx 82{,}3°$$

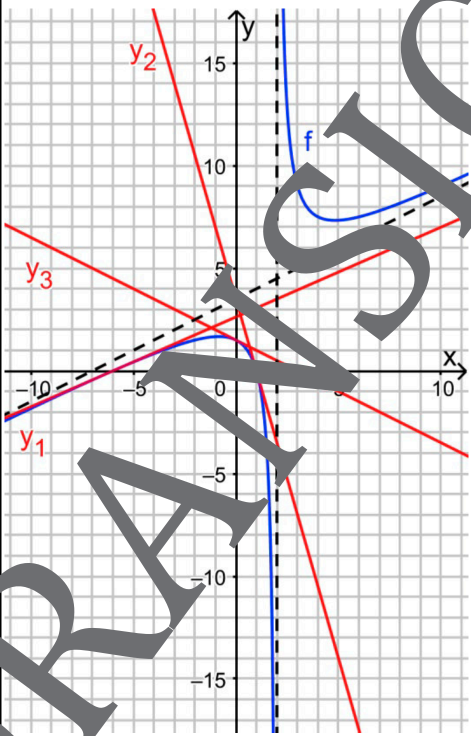
Schräge Asymptote

$$\left(x^2+5x-6\right):(2x-4)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+\frac{8}{2x-4}$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

Funktion 1				
a = 1	b = 5	c = –6	d = 2	e = 4

$f(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{2x-4}$	$f'(x)=\dfrac{2x^2-8x-8}{(2x-4)^2}$	$f''(x)=\dfrac{64}{(2x-4)^3}$



Def.bereich: $x \in \mathbb{R};\ x \neq 2$	Wertebereich: $7{,}33 \leq y \leq 1{,}67$
$S_{x_1}(-6\,\|\,0)$	$S_{x_2}(1\,\|\,0)$
$m_{x_1}=\dfrac{7}{16}$	$m_{x_2}=-\dfrac{7}{2}$
$\alpha_{x_1}=23{,}6°$	$\alpha_{x_2}=105{,}9°$
Tangente in S_{x_1}: $y_1=\dfrac{7}{16}x+\dfrac{21}{8}$	Tangente in S_{x_2}: $y_2=-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{2}$
$S_y\left(0\,\|\,\dfrac{3}{2}\right)$	$m_y=-\dfrac{1}{2}$
Tangente in S_y: $y_3=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$	$\alpha_3=153{,}4°$
$S_t\left(\dfrac{2}{9}\,\|\,\dfrac{49}{18}\right)$	$\alpha_t=82{,}3°$
Asymptote in x: $x=2$	Asymptote schräg: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$
Lok. Min. $E_{min}(4{,}83\,\|\,7{,}33)$	Lok. Max. $E_{max}(-0{,}83\,\|\,1{,}67)$

Symmetrie: keine	Polstelle: $x_p=2$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}=f(x)=\pm\infty$

Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall $[x_1;\ x_2]$
A = 7,43 FE