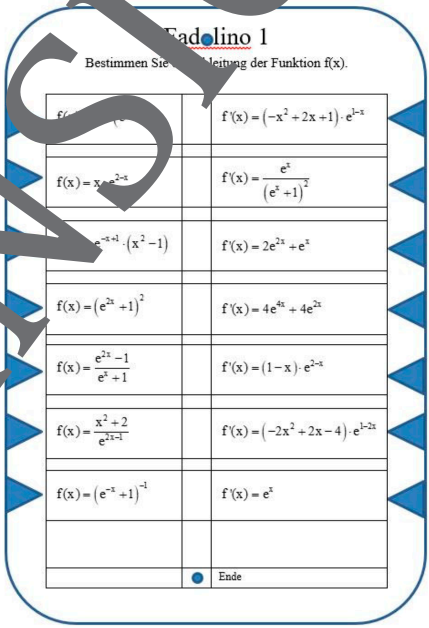
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II


Fadolino 1

Bestimmen Sie [illegible]leitung der Funktion f(x).

[illegible]		$f'(x) = (-x^2 + 2x + 1) \cdot e^{1-x}$
$f(x) = x \cdot e^{2-x}$		$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
[illegible] $e^{-x+1} \cdot (x^2 - 1)$		$f'(x) = 2e^{2x} + e^x$
$f(x) = (e^{2x} + 1)^2$		$f'(x) = 4e^{4x} + 4e^{2x}$
$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$		$f'(x) = (1 - x) \cdot e^{2-x}$
$f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^{2x-1}}$		$f'(x) = (-2x^2 + 2x - 4) \cdot e^{1-2x}$
$f(x) = (e^{-x} + 1)^{-1}$		$f'(x) = e^x$
		Ende

Wiederholen von Eigenschaften der Exponentialfunktionen mit Fadolinos

Eine Möglichkeit zur Selbstkontrolle

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

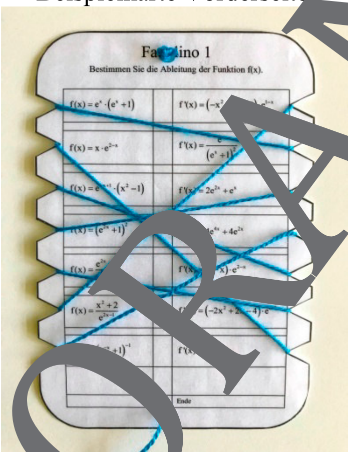
Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Sc[illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber

Wiederholen von Eigenschaften der Exponentialfunktion mit Fadolinos

Vorbereitung: Die Karten werden laminiert und ausgeschnitten. Bei jeder Aufgabe und bei jeder Lösung wird die Markierung herausgeschnitten, sodass eine Kerbe entsteht. Anschließend wird die Karte oben und unten gelocht. Der Faden wird durch das mittlere "O" des Wortes Fadolino von vorn nach hinten durch die Karte geführt und vorn befestigt.

Durchführung: Der Faden wird auf der Rückseite zur 1. Aufgabe (1. Kerbe von oben) gezogen und in die Kerbe eingehängt. Nun wird die Lösung auf der rechten Seite gesucht und der Faden dort in die Kerbe gezogen. Der Faden wird auf der Rückseite zur 2. Aufgabe (2. Kerbe von oben) gezogen. Auf der Vorderseite wird der Faden dann wieder zur Lösung (Kerbe auf der rechten Seite) fortgeführt usw. Am Ende wird der Faden von der Lösung der letzten Aufgabe durch das Loch beim Wort ‚Ende‘ von hinten nach vorn durch die Karte gezogen.

Beispielkarte Vorderseite	Beispielkarte Rückseite
	

Anmerkung: Der Fadenverlauf ist nur beispielhaft.

Kontrolle: Die Karte wird umgedreht und anhand des Verlaufs des Fadens auf der Rückseite wird kontrolliert, ob die Aufgaben richtig gelöst wurden. Dies geschieht, indem die Karte mit der ausgelegten Lösung verglichen wird. Stimmt der Fadenverlauf nicht mit der Lösung überein, so kann der Faden (teilweise) gelöst und erneut gezogen werden. Bei erneutem falschen Fadenlauf kann die richtige Lösung vom Fadenverlauf übernommen und anschließend überlegt werden, warum dies so ist.

Einsatz: Der Einsatz der Karten ist vorwiegend zur Wiederholung, zum selbsttätigen Lernen oder zur Selbstkontrolle gedacht. Dies geschieht meistens in Einzelarbeit, die Arbeit kann aber auch in Partnerarbeit durchgeführt werden. Denkbar ist auch ein Wettbewerb, sodass mehrere Schüler zusammenarbeiten können. Vergleichbar zum Spiel *Stadt – Land – Fluss* hören alle Schüler der Gruppe auf, wenn der erste Schüler fertig ist. Bei der Auswertung bekommt man für die richtige Lösung je Aufgabe eine bestimmte Anzahl von Punkten, evtl. werden Punkte bei falschen Antworten abgezogen.
Die Bearbeitung der Aufgaben sollte (vorwiegend) ohne GTR oder CAS erfolgen. Sie können somit auch als Vorbereitung für die Bearbeitung hilfsmittelfreier Teile bei Klausuren angesehen werden.

In der nachfolgenden Tabelle finden Sie Karten zu den Themengebieten:

Karte	**Themengebiet**
Fadolino 1	Ableitung von Exponentialfunktionen
Fadolino 2	Entwicklung von Exponentialfunktionen (Verschiebung in Richtung der x- bzw. y-Achse; Streckung bzw. Stauchung in Richtung der x- bzw. y-Achse)
Fadolino 3	Extrempunkte
Fadolino 4	Gleichung der Asymptoten
Fadolino 5	Stammfunktionen
Fadolino 6	Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse
Fadolino 7	Umkehrfunktion zu Exponentialfunktionen

Fadolino 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f(x).

$f(x)=e^x\cdot\left(e^x+1\right)$		$f'(x)=\left(-x^2+2x+1\right)\cdot e^{1-x}$
$f(x)=x\cdot e^{2-x}$		$f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$
$f(x)=e^{-x+1}\cdot\left(x^2-1\right)$		$f'(x)=2e^{2x}+e^x$
$f(x)=\left(e^{2x}+1\right)^2$		$f'(x)=4e^{4x}+4e^{2x}$
$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$		$f'(x)=\left(1-x\right)\cdot e^{2-x}$
$f(x)=\frac{x^2+\text{[illegible]}}{e^{2x-1}}$		$f'(x)=\left(-2x^2+2x-4\right)\cdot e^{1-2x}$
$f(x)=\left(e^{-x}+1\right)^{-1}$		$f'(x)=e^x$
	●	Ende

Fadolino 2

Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graph der Funktion $f(x) = e^{2x+1}$. Bestimmen Sie die Funktion g.

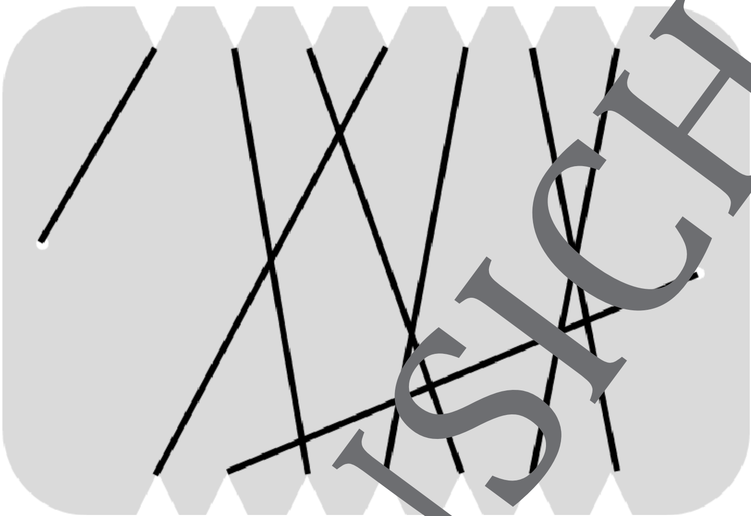
Verschiebung um 2 LE nach rechts und um $\frac{1}{e}$ LE nach oben.		$g(x) = [illegible]\left(e^{2x+1} - 1\right)$
Spiegelung an der y-Achse und Streckung in Richtung der y-Achse um den Faktor e.		$g(x) = \frac{1}{e} \cdot \left(e^{2x} + 1\right)$
Spiegelung an der x-Achse, Stauchung um den Faktor e^{-1} in Richtung der y-Achse und Verschiebung um 1 LE nach oben.		$g(x) = e^{x+2}$
Streckung in Richtung der y-Achse um den Faktor e und Verschiebung um e LE nach unten.		$g(x) = -e^{2x} + 1$
Verschiebung um 0,5 LE nach links, Streckung in Richtung der x-Achse um den Faktor 2.		$g(x) = e^{-2x+2}$
		Ende

Fadolino 3

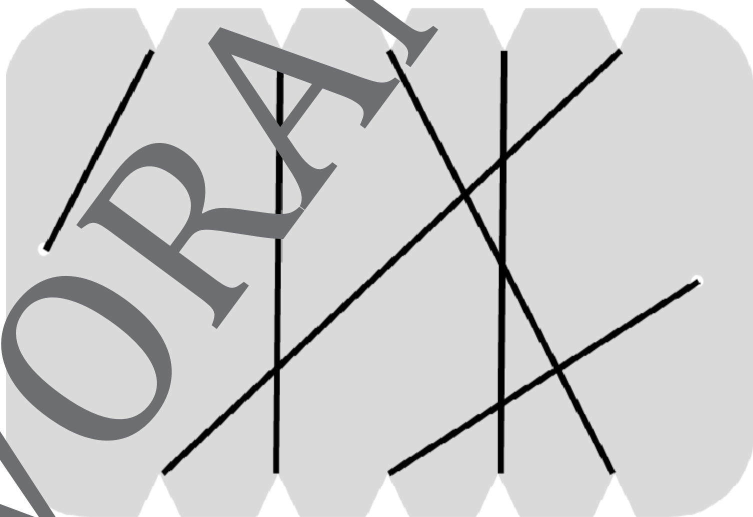
Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f(x).

$f(x) = -e^{x-1} \cdot (x^2 - 3x + 3)$		kein Extrempunkt vorhanden
$f(x) = -e^{-x} \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 2)$		$H\left(2 \mid \frac{7}{e^2}\right); T\left([illegible] \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} \cdot (x^2 - 2x - 1)$		$[illegible]\left(0 \mid -\frac{3}{e}\right); H(1 \mid -1)$
$f(x) = e^{3x} \cdot (9x^2 - 6x + [illegible])$		$[illegible](-1 \mid -e^2); H\left(2 \mid \frac{5}{e}\right)$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - [illegible]x + 4) [illegible]^{0,5x-1}$		$T\left(2 \mid -\frac{18}{e^2}\right)$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{1-[illegible]x} \cdot (2 - x^2)$		$H\left(-1 \mid \frac{1}{e}\right); T\left(2 \mid \frac{-e^5}{2}\right)$
$f(x) = [illegible]^{1-x} \cdot (x^{[illegible]} + x - 1)$		$H\left(-1 \mid \frac{e^3}{2}\right); T\left(2 \mid \frac{-1}{e^3}\right)$
	●	Ende

Rückseite Fadolino 1



Rückseite Fadolino 2



Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: Vermutungen äußern; Ergebnisse vorstellen
- Problemlösen: –
- Modellierung: –
- Medien: Fadolino-Karten
- Methode: Einzelarbeit/Partnerarbeit/Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Exponentialfunktion**;** Ableitung (Produkt-, Ketten und Quotientenregel), Entwicklung von Funktionen; Extrempunkte, Asymptoten, Stammfunktion (partielle Integration), Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse, Nullstellen, Umkehrfunktion, Zusatz: Definitionsbereich von Logarithmusfunktionen

Autor: Günther Weber

Lösung

Fadolino 1: Ableitung von Exponentialfunktionen

Für die Funktion $f(x)=e^x$ gilt $f'(x)=e^x$.

Zum Ableiten komplexer Funktionen benötigt man jedoch weitere Regeln:

- **Produktregel**

  $f(x)=u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

- **Quotientenregel**

  $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}, v(x)\neq 0$ für alle $x\in D$

  $\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

  Durch Umschreiben des Funktionsterms kann auch oft die Produktregel verwendet werden.

- **Kettenregel**

  $f(x)=u\left(v(x)\right)\Rightarrow f'(x)=u'\left(v(x)\right)\cdot v'(x)$

Kerbe 1	$f(x)=e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)=e^{2x}+e^{x}$ $f'(x)=2\cdot e^{2x}+e^{x}$ Oder mithilfe der Produktregel: $f'(x)=e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)+e^{x}\cdot e^{x}=e^{2x}+e^{x}+e^{2x}=2\cdot e^{2x}+e^{x}$
Kerbe 2	$f(x)=x\cdot e^{2-x}$ $f'(x)=1\cdot e^{2-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{2-x}=e^{2-x}\cdot(1-x)$
Kerbe 3	$f(x)=e^{-x+1}\cdot\left(x^{2}-1\right)$ $f'(x)=-e^{-x+1}\cdot\left(x^{2}-1\right)+e^{-x+1}\cdot 2x=e^{-x+1}\cdot\left(-x^{2}+2x+1\right)$
Kerbe 4	$f(x)=\left(e^{2x}+1\right)^{2}=e^{4x}+2\cdot e^{2x}+1$ $f'(x)=4\cdot e^{4x}+4\cdot e^{2x}$ Oder mithilfe der Kettenregel: $f(x)=2\cdot\left(e^{2x}+1\right)\cdot 2e^{2x}=4e^{4x}+4\cdot e^{2x}$
Kerbe 5	$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{\left(e^{x}-1\right)\cdot\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}=e^{x}-1$ $f'(x)=e^{x}$ Oder mit der Quotientenregel: $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\cdot\left(e^{x}+1\right)-\left(e^{2x}-1\right)\cdot e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ $=\dfrac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{3x}+e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{e^{3x}+2e^{2x}+e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ $=\dfrac{e^{x}\cdot\left(e^{2x}+2e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)^{2}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=e^{x}$

Kerbe 6	$f(x)=\dfrac{x^2+2}{e^{2x-1}}=\left(x^2+2\right)\cdot e^{1-2x}$ $f'(x)=2x\cdot e^{1-2x}+(x^2+2)\cdot(-2)\cdot e^{1-2x}$ $\quad =e^{1-2x}\cdot\left(-2x^2+2x-4\right)=\dfrac{-2x^2+2x-4}{e^{2x-1}}$ Oder mit der Quotientenregel: $f'(x)=\dfrac{2x\cdot e^{2x-1}-\left(x^2+2\right)\cdot 2e^{2x-1}}{\left(e^{2x-1}\right)^2}$ $\quad =\dfrac{e^{2x-1}\cdot\left(-2x^2+2x-4\right)}{\left(e^{2x-1}\right)^2}=\dfrac{-2x^2+2x-4}{e^{2x-1}}$
Kerbe 7	$f(x)=\left(e^{-x}+1\right)^{-1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(1+e^x\right)-e^x\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ Oder mithilfe der Kettenregel: $f'(x)=-\left(e^{-x}+1\right)^{-2}\cdot\left(-e^{-x}\right)=\dfrac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}$ $\quad =\dfrac{e^{2x}\cdot e^{-x}}{e^{2x}\cdot\left(e^{-2x}+2e^{-x}+1\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

Fadolino 2: Entwicklung von Exponentialfunktionen

Der Graph der Funktion f(x) + d entsteht aus dem Graph der Funktion f durch **Verschiebung** um |d| Längeneinheiten **in Richtung der y-Achse** (d > 0: Verschiebung nach oben; d < 0: Verschiebung nach unten). Der Graph der Funktion f(x + c) entsteht aus dem Graph der Funktion f durch **Verschiebung** um |c| Längeneinheiten **in Richtung der x-Achse** (c > 0: Verschiebung nach links; c < 0: Verschiebung nach rechts). Der Graph der Funktion $a \cdot f(x)$ entsteht aus dem Graph der Funktion f durch **Streckung/Stauchung** mit dem Faktor |a| **in Richtung der y-Achse** (a > 1: Streckung; 0 < a < 1: Stauchung). Ist a < 0, so findet zusätzlich noch eine Spiegelung an der x-Achse statt. Der Graph der Funktion $f(k \cdot x)$ entsteht aus dem Graph der Funktion f durch **Streckung/Stauchung** mit dem Faktor |k| **in Richtung der x-Achse** (k > 1: Stauchung; 0 < k < 1: Streckung). Ist k < 0, so findet zusätzlich noch eine Spiegelung an der y-Achse statt.

Kerbe 1	$f(x) = e^{2x+1}$ Verschiebung um 2 LE nach rechts: $e^{2(x-2)+1}$ Verschiebung um $\frac{1}{e}$ LE nach oben: $e^{2(x-2)+1} + \frac{1}{e}$ $g(x) = e^{2x-1} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot \left(e^{2x} + 1\right)$
Kerbe 2	$f(x) = e^{2x+1}$ Spiegelung an der y-Achse: $e^{2(-x)+1}$ Streckung in Richtung der y-Achse um den Faktor e: $e \cdot e^{2(-x)+1}$ $g(x) = e^{-2x+2}$

Kerbe 3	$f(x) = e^{2x+1}$ Spiegelung an der x-Achse: $-e^{2x+1}$ Stauchung um den Faktor e^{-1} in Richtung der y-Achse: $\frac{1}{e} \cdot \left(-e^{2x+1}\right)$ Verschiebung um 1 LE nach oben: $\frac{1}{e} \cdot \left(-e^{2x+1}\right) + 1$ $g(x) = -e^{2x} + 1$
Kerbe 4	$f(x) = e^{2x+1}$ Streckung in Richtung der y-Achse um den Faktor e: $e \cdot e^{2x+1}$ Verschiebung um e LE nach unten: $e \cdot e^{2x+1} - e$ $g(x) = e \cdot \left(e^{2x+1} - 1\right)$
Kerbe 5	$f(x) = e^{2x+1}$ Verschiebung um 0,5 LE nach links: $e^{2(x+0,5)+1}$ Streckung in Richtung der x-Achse um den Faktor 2: $e^{2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x+0,5)+1}$ $g(x) = e^{x+2}$