

# UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Anwendungen der Differentialrechnung in der Wirtschaft

Kosten- und Gewinnfunktionen – Teil 1

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 6 900-0  
Fax +49 711 62900  
schule@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth  
Satz: Rösel-MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe  
Illustrationen: Göttingen Leitz  
Bildnachweis Titel: Andrey Popov / iStock / Getty Images Plus  
Lektorat: Mona Hitznauer

## Anwendungen der Differenzialrechnung in der Wirtschaft – Kosten- und Gewinnfunktionen – Teil 1

### Vorbemerkungen – Ausblick

Etwa ab Mitte des 17. Jahrhunderts wurde die Mathematik um ein Gebiet erweitert, das auch in der Wirtschaftswissenschaft von besonderer Bedeutung ist: die Differenzialrechnung. Newton (1643 – 1727) und Leibniz (1646 – 1716) haben die Grundlagen zur Differenzialrechnung gelegt. Anfangs etablierte sie sich besonders in der Physik zur Lösung einfacher Bewegungsprobleme (Geschwindigkeit und Beschleunigung als 1. bzw. 2. Ableitung des Weges nach der Zeit). Später fand die Differenzialrechnung ihren Fug in der Wirtschaftswissenschaft zur Analyse ökonomischer Zusammenhänge.

Die Wirtschaftsmathematik beschäftigt sich im Rahmen der Differenzialrechnung mit der Analyse und Abhängigkeit von Kosten, Preisen, Angebot und Nachfrage, Umsätzen und Gewinn.

Ziel eines jeden Unternehmens ist die Maximierung des Gewinns. So haben Wirtschaftswissenschaftler einfache mathematische Modelle entwickelt, mit deren Hilfe sich die bei der Herstellung (Produktion) von Erzeugnissen anfallenden Kosten und der zu erzielende Gewinn nähernd quantitativ beschreiben lassen. Hierbei muss man jedoch wissen, wie bei jeder Modellbildung als Abbild eines realen Problems - von idealisierten Annahmen ausgehen, die in der Praxis nicht immer genau eintreffen.

Es sind beispielsweise die optimalen Mengen  $x$  für die Maximierung des Gewinns oder die ausbringende Menge  $x$ , bei der die Kosten minimal sind, zu bestimmen, wobei versucht wird, die aktuelle Situation mittels Funktionen darzustellen und die Auswirkungen von Veränderungen zu interpretieren.

Nachfolgend sollen grundlegende ökonomische Begriffe und deren Darstellung und Untersuchung mithilfe von Funktionen behandelt werden. Aufgrund des Umfangs der Problematik erfolgt die Darstellung in zwei Teilen.

**Teil 1:**

- Kosten, Erlös und Gewinn
- Gesamtkosten (Summe aus variablen Kosten und Fixkosten) und Gesamtkostenfunktion
- Degressive und progressive Kosten, Kostenkehre
- Grenz- und Stückkosten, Grenzkosten- und Stückkostenfunktion
- Betriebsoptimum und Betriebsminimum
- Lang- und kurzfristige Preisuntergrenze

**Teil 2:**

- Preis und Preisfunktion bzw. Preis- und Nachfragefunktion/Preisabsatzfunktion (PAF), Erlös und Erlösfunktion
- Erlös und Erlösfunktion bzw. Gewinn und Gewinnfunktion
- Gewinnzone, Gewinnschwelle und Gewinnuntergrenze, Break-Even-Point
- Maximaler Gewinn und Cournotscher Punkt

Teil 1 wird in diesem Beitrag behandelt, Teil 2 in einem weiteren.

### Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Mathematik und Wirtschaft
- Kommunikation: begründen, argumentieren, vergleichen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Probleme erkunden, Probleme zerlegen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: Modellanpassung
- Medien: Farbfolie, Computer (GeoGebra, optional)
- Methode: äußere und Binnendifferenzierung bzw. innere Differenzierung (Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit)
- Inhalt in Stichworten: Ganzrationale Funktionen, Ableitung, Nullstelle, Extremum, Wendepunkt, Schnittpunkt, Kostenfunktionen, Erlös- und Gewinnfunktionen, Preisabsatzfunktion, Polypol, Monopol, Kapazitätsgrenze, Gewinnschwelle, Gewinnzone, Betriebsoptimum, Betriebsminimum, kurz- und langfristige Preisuntergrenze, Break-Even-Point, Cournotscher Punkt

**Autor:** Dr. Jürgen Leitz

### Methodisch-didaktische Hinweise

Der Hauptschwerpunkt besteht in der Anwendung der Differenzialrechnung in der Wirtschaft bei der Lösung ökonomischer Zusammenhänge. Die rein mathematische Untersuchung einer Funktion in Form einer Kurvendiskussion tritt dabei in den Hintergrund, vielmehr sollen wichtige funktionale Beziehungen und markante Punkte vor einem Anwendungshintergrund betrachtet werden. Hierfür eignet sich der Bereich Wirtschaft in besonderem Maße, da alle typischen Fragestellungen (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Schnittstellen zweier Funktionen sowie die grafische Veranschaulichung) in diesem Bereich ihre Anwendung finden.

An einem einfachen Einstiegsbeispiel (Zuckerwatte) werden grundlegende, allgemeinverständliche Begriffe wie Kosten (Fixkosten, variable Kosten, Gesamtkosten), Erlös und Gewinn erarbeitet. Die Zusammenfassung und weitere Vermittlung ökonomischer Begriffe erfolgt durch Infoblätter, wobei alle Inhalte und neuen Begriffe anschließend an geeigneten Aufgaben von den Schülern selbstständig erarbeitet und angewendet werden. Die Bearbeitung aller Aufgaben kann in arbeitsteiliger Gruppenarbeit mit Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bzw. innerer Differenzierung geschehen. Durch diese Vorgehensweise soll

das selbständige Lernen gefördert und die möglicherweise schwer greifbaren theoretischen Betrachtungen direkt an einem konkreten Beispiel veranschaulicht werden. Mithilfe der Farbfolie kann die grafische Darstellung der Gesamtkostenfunktion vorentlastet werden. Den Abschluss bilden zwei komplexe (Klausur-ähnliche) Aufgaben zur Festigung des gesamten Inhalts. Diese beiden Aufgaben können auch als abschließende Klausur (oder zur Abiturvorbereitung) verwendet werden.

Eine Zusammenstellung aller Begriffe und Formeln zu diesem Beitrag finden Sie im Online-Archiv.

### Kostenarten, Erlös und Gewinn

Fritz Zuckersüß, Besitzer einer Zuckerbäckerei, ist mit seinem Stand für Zuckerwatte auf Jahr- und Weihnachtsmärkten anzutreffen. Die tägliche Standgebühr beträgt 20 €. Diese Gebühr ist unabhängig davon zu entrichten, ob nun viel oder wenig Zuckerwatte (oder keine, was wohl selten wäre) verkauft wird. Ebenso unabhängig von der Anzahl der verkauften Zuckerwatten ist das Gehalt für den Verkäufer, in Höhe von 80 € pro Tag, zu zahlen. Diese Kosten sind **feststehend**. **Kosten**, man nennt sie auch **Fixkosten**.



© Dr. Jürgen Leitz

Des Weiteren fallen noch die sogenannten Materialkosten für die benötigten Zutaten wie Zucker, (einmal schon gefärbter Zucker vorhanden) sowie Stäbchen an. Diese belaufen sich auf etwa 0,75 € pro Zuckerwatte. Hierbei handelt es sich um **variable Kosten**. Wenn mehr Zuckervatzen hergestellt und verkauft werden, dann fallen auch mehr Materialkosten an.

Die **Gesamtkosten** setzen sich aus der Summe der variablen und fixen Kosten zusammen.

Eine Portion Zuckerwatte wird für 2,00 € verkauft. Die Einnahmen aus dem Verkauf werden als **Erlös** oder **Umsatz** bezeichnet. Die Differenz aus dem Erlös und den Kosten ist der **Gewinn** aus dem Verkauf der Zuckerwatten.

## Aufgaben zu Kostenarten, Erlös und Gewinn

Am Eröffnungstag des Jahrmarktes, einem Freitag, regnete es und es kamen wenige Besucher. Deshalb wurden an diesem Tag nur 200 Portionen Zuckerwatte hergestellt und verkauft. Am Folgetag, schönster Sonnenschein und Wochenende, wurden dagegen 400 Portionen verkauft.

### 1. Kosten

- Geben Sie die fixen und die variablen Kosten sowie die Gesamtkosten an, die am Eröffnungstag angefallen sind.
- Wie hoch sind die angefallenen fixen und variablen Kosten sowie die Gesamtkosten am Folgetag?
- Zwischen der Anzahl der hergestellten Zuckerwatten und den dafür benötigten Materialkosten (variable Kosten) besteht ein funktionaler Zusammenhang.  
Wie verändern sich diese Kosten, wenn sich die Anzahl der Zuckerwatteportionen verdoppelt (verdreifacht, verzehnfacht)?
- Gilt ein entsprechender Zusammenhang auch für die fixen Kosten und die Gesamtkosten? Begründen Sie Ihre Aussage.  
*Hinweis:* Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b).

### 2. Erlös

- Berechnen Sie den Erlös, der jeweils am ersten und zweiten Tag erzielt wurde.
- Besteht zwischen der Menge der verkauften Zuckerwatten und dem erzielten Erlös ein funktionaler Zusammenhang? Wie verändern sich die Einnahmen, wenn sich die Anzahl der Zuckerwatteportionen verdoppelt (verdreifacht, verzehnfacht)?  
*Hinweis:* Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse aus Teilaufgabe a).
- Wie viele Portionen Zuckerwatte müssen mindestens verkauft werden, damit die Fixkosten abgedeckt werden?



### 3. Gewinn

- a) Berechnen Sie den Gewinn, den die Zuckerbäckerei Zuckerbäckerei jeweils am ersten und zweiten Tag mit dem Zuckerwatteverkauf erzielt.
- b) Besteht zwischen der Anzahl der verkauften Zuckerwatteportionen und dem erzielten Gewinn ein funktionaler Zusammenhang? Begründen Sie Ihre Aussage.  
*Hinweis:* Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse aus Teilaufgabe a).
- c) Die Kapazitätsgrenze bei der Herstellung der Zuckerwatteportionen liegt bei etwa 600 Portionen pro Tag (das ist die Menge, die höchstens hergestellt und verkauft werden kann). Berechnen Sie den maximalen Gewinn, wenn genau diese Menge hergestellt und verkauft wird.
- d) Wie viele Zuckerwatteportionen müssen mindestens hergestellt und verkauft werden, damit ein Gewinn erzielt wird?  
*Hinweis:* Bezeichnen Sie die Anzahl der hergestellten und verkauften Portionen mit  $x$  (Ausbringungsmenge) und geben Sie die Kosten und den Erlös allgemein an.

### Lösungen zu Kostenarten, Erlös und Gewinn

#### 1. Kosten

a) Kosten am 1. Tag:

Fixkosten:	$20 \text{ €} + 80 \text{ €}$	$=$	$100 \text{ €}$
Variable Kosten:	$0,75 \text{ €} \cdot 200$	$=$	$\underline{150 \text{ €}}$
Gesamtkosten:			$250 \text{ €}$

b) Kosten am 2. Tag:

Fixkosten:	$20 \text{ €} + 80 \text{ €}$	$=$	$100 \text{ €}$
Variable Kosten:	$0,75 \text{ €} \cdot 400$	$=$	$\underline{300 \text{ €}}$
Gesamtkosten:			$400 \text{ €}$

- c) Wenn sich die Anzahl der Zuckerwatteportionen verdoppelt (verdreifacht, verzehnfacht), dann verdoppeln (verdreifachen, verzehnfachen) sich auch die variablen Kosten, da zwischen den Zuckerwatteportionen und den variablen Kosten Proportionalität besteht.

- d) Ein entsprechender Zusammenhang wie in Teilaufgabe c) beschreiben gilt nicht für die Fixkosten (sind immer konstant 100 €) und auch nicht für die Gesamtkosten, da sich diese aus variablen und fixen Kosten zusammensetzen und somit nur zum Teil von der Anzahl der Zuckerwatteportionen abhängen.

## 2. Erlös

- a) Erlös am 1. Tag:  $2,00 \text{ €} \cdot 200 = 400 \text{ €}$   
 Erlös am 2. Tag:  $2,00 \text{ €} \cdot 400 = 800 \text{ €}$
- b) Zwischen der Anzahl der verkauften Zuckerwatteportionen und dem Erlös besteht ein funktionaler Zusammenhang (Proportionalität), d. h.: Wenn sich die Anzahl der Zuckerwatteportionen verdoppelt (verdreifacht, verzehnfacht), dann verdoppeln (verdreifachen, verzehnfachen) sich auch die Einnahmen aus dem Verkauf, also der Erlös.
- c) Die Fixkosten betragen 100 €. Da eine Zuckerwatte zum Preis von 2,00 € verkauft wird, müssen mindestens 50 Zuckerwatte (Erlös  $= 2,00 \text{ €} \cdot 50 = 100 \text{ €}$ ) zur Abdeckung der Fixkosten verkauft werden.

## 3. Gewinn

- a) Gewinn = Erlös – Kosten  
 Mit den Ergebnissen aus den Aufgaben 1 und 2 für die Kosten und den Erlös an den beiden Tagen erhält man für den  
 Gewinn am 1. Tag:  $400 \text{ €} - 250 \text{ €} = 150 \text{ €}$   
 Gewinn am 2. Tag:  $800 \text{ €} - 400 \text{ €} = 400 \text{ €}$
- b) Nach Teilaufgabe a) führt Verdopplung der Verkaufszahlen nicht zur Verdopplung des Gewinns, der sich hier stattdessen auf das etwa 2,7-fache ergibt. Zwischen der Anzahl der verkauften Zuckerwatteportionen und dem erzielten Gewinn besteht also keine Proportionalität, jedoch ergibt sich über die Gleichung: Gewinn = Erlös – Kosten durch den funktionalen Zusammenhang, da alle drei Größen von der Produktionsmenge  $x$  abhängen.

- c) Die Kapazitätsgrenze liegt bei 600 Portionen Zuckerwatte.

$$\text{Fixkosten:} \quad 20 \text{ €} + 80 \text{ €} = 100 \text{ €}$$

$$\text{Variable Kosten:} \quad 0,75 \text{ €} \cdot 600 = \underline{450 \text{ €}}$$

$$\text{Gesamtkosten:} \quad 550 \text{ €}$$

$$\text{Erlös:} \quad 2,00 \text{ €} \cdot 600 = 1200 \text{ €}$$

$$\text{Gewinn:} \quad 1200 \text{ €} - 550 \text{ €} = 650 \text{ €}$$

Der maximale Gewinn beim Erreichen der Kapazitätsgrenze würde also bei 650 € liegen.

- d) Damit überhaupt ein Gewinn erzielt wird, müssen die Einnahmen aus dem Verkauf, also der Erlös, größer als die Kosten sein. Gleichung: Gewinn = Erlös – Kosten), sonst würde ein negativer Gewinn (Verlust) auftreten. Mit  $x$  als Anzahl der verkauften Zuckerwatteportionen gilt für den Erlös und die Kosten:

$$\text{Erlös:} \quad 2,00 \text{ €} \cdot x$$

$$\text{Kosten:} \quad 0,75 \text{ €} \cdot x + 100$$

Bei Gleichheit der beiden Werte deckt der Erlös gerade die Kosten ab:

$$2 \cdot x = 0,75 \cdot x + 100 \quad | -0,75 \cdot x$$

$$1,25 \cdot x = 100 \quad | : 1,25$$

$$x = 80$$

Bei 80 verkauften Zuckerwatteportionen wird noch kein Gewinn erzielt, aber auch kein Verlust gemaint. Für einen (positiven) Gewinn müssen also mindestens 81 Zuckerwatteportionen verkauft werden.

**Kontrolle:**

$$80 \text{ Portionen:} \quad \text{Kosten} \quad 80 \cdot 0,75 + 100 \text{ €} = 160,00 \text{ €}$$

$$\text{Erlös:} \quad 80 \cdot 2,00 \text{ €} = \underline{160,00 \text{ €}}$$

$$\text{Gewinn:} \quad 0 \text{ €}$$

$$81 \text{ Portionen:} \quad \text{Kosten} \quad 81 \cdot 0,75 + 100 \text{ €} = 160,75 \text{ €}$$

$$\text{Erlös:} \quad 81 \cdot 2,00 \text{ €} = \underline{162,00 \text{ €}}$$

$$\text{Gewinn:} \quad 1,25 \text{ €}$$

Es müssen also mindestens 81 Zuckerwatteportionen verkauft werden, damit ein Gewinn erzielt wird.

**Infoblatt 1: Kosten, Erlös und Gewinn im Produktionsbetrieb****(1) Fixe Kosten (Fixkosten)  $K_f$** 

Fixkosten sind feststehende Kosten, die sich nicht ändern, unabhängig davon, welche Menge eines Produkts hergestellt wird. Sie sind stets konstant und fallen auch dann an, wenn kein Produkt hergestellt wird. Beispiele: Mietkosten, Beleuchtungskosten, Löhne und Gehälter.

**(2) Variable Kosten  $K_v$** 

Variable Kosten sind abhängig von der Menge der hergestellten Produkte (Produktions- oder Ausbringungsmenge). Beispiele: Materialkosten für Roh- und Hilfsstoffe, Fertigungslöhne, Energiekosten für die Maschinen.

**(3) Gesamtkosten  $K$** 

Die Gesamtkosten ergeben sich als Summe aus variablen und fixen Kosten:  $K = K_v + K_f$

**(4) Erlös (Umsatz)  $E$** 

Die Einnahmen aus dem Verkauf eines hergestellten Produktes werden als Erlös bezeichnet (Umsatzerlös). Der Erlös stellt den durch den Verkauf erzielten Geldbetrag dar und berechnet durch Multiplikation des Preises  $p$  des Produktes mit der Stückzahl  $x$  als Verkaufsmenge (Absatzmenge).

**(5) Gewinn  $G$** 

Der Gewinn ergibt sich aus der Differenz von Erlös und Kosten:

**Gewinn = Erlös – Kosten** Um mit dieser Gleichung sinnvoll rechnen zu können, wird für die Kosten- und Gewinnrechnung immer davon ausgegangen, dass alle hergestellten Produkte auch verkauft werden können, d. h., dass die Produktionsmenge gleich der Absatzmenge ist. Die drei Begriffe **Produktionsmenge**, **Ausbringungsmenge** und **Absatzmenge** werden deshalb synonym verwendet.

**Bemerkung:** Unter Gewinn ist zunächst nur ein **Rohgewinn** zu verstehen. Von diesem Rohgewinn sind dann ggf. noch weitere Kosten wie Zinsen für Kredite zu subtrahieren und weitere Erträge wie Zins- oder Mieterträge zu addieren. Erst dann erhält man den Gewinn des Unternehmens als **Reingewinn** bzw. als **Verlust**, so dass es zu einer Erhöhung bzw. Verringerung des Eigenkapitals kommt. Im Verkaufspreis und damit im Rohgewinn ist auch noch die Umsatzsteuer enthalten (hier 7 %), die an Finanzamt abzuführen ist. Bei den weiteren Betrachtungen wollen wir unter Gewinn stets den Rohgewinn aus dem Absatz (Verkauf) verstehen.

### Wirtschaftswissenschaftliche Funktionen

Anhand des Beispiels des Zuckerwatteverkäufers haben Sie bereits die Zusammenhänge zwischen der hergestellten Menge  $x$  eines Produktes (Anzahl der Zuckerwatteportionen) und den Kosten, dem Erlös und dem Gewinn untersucht. Diese Zusammenhänge können mathematisch durch Funktionen beschrieben werden. Für allgemeine Betrachtungen werden dabei Mengen in ME (Mengeneinheiten) und Geldbeträge in GE (Geldeinheiten) angegeben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich weiterhin auf die Situation der Herstellung und des Verkaufs der Zuckerwatte, wie bereits in den Aufgaben 1 bis 3 beschrieben. Dabei bleiben alle Angaben zu Kosten und zum Verkaufspreis bestehen. Die Kapazitätsgrenze bei der Herstellung der Zuckerwatteportionen liegt weiterhin bei 600 Portionen.

*Hinweis:* Verwenden Sie Ihre Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3.

### Aufgaben zu wirtschaftswissenschaftlichen Funktionen

#### 4. Kostenfunktion

- Die variablen Kosten  $K_v$ , die Fixkosten  $K_f$  und die Gesamtkosten  $K$  können durch einen Funktionsterm in Abhängigkeit von der Produktionsmenge  $x$  dargestellt werden.  
Geben Sie die Gleichungen der drei Funktionen (für die Situation des Zuckerwattenverkaufs) an. Was für eine Funktion liegt hier jeweils vor?
- Stellen Sie die beiden Funktionen  $K_v(x)$  und  $K_f(x)$  mithilfe einer Wertetabelle in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Wählen Sie dabei für die Produktionsmenge auf der  $x$ -Achse einen Maßstab von  $1 \text{ cm} \hat{=} 50 \text{ ME}$  (Zuckerwatte) und für die Kosten auf der  $y$ -Achse einen Maßstab von  $1 \text{ cm} \hat{=} 50 \text{ GE}$  (Euro).

- c) Die beiden Graphen der Funktionen  $K_v(x)$  und  $K_f(x)$  schneiden sich in genau einem Punkt S. Interpretieren Sie diesen Schnittpunkt im Sachkontext.
- d) Zeichnen Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion  $K(x)$  in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe b) ein. Erläutern Sie, wie man diesen Graphen aus den Graphen der Funktionen  $K_v(x)$  und  $K_f(x)$  erhält.
- e) Lesen Sie aus der Zeichnung die variablen Kosten, die Fixkosten und die Gesamtkosten für die am ersten und zweiten Tag hergestellten und verkauften 200 bzw. 400 Zuckerwatteportionen ab.
- f) Bestätigen Sie die abgelesenen Werte aus Teilaufgabe e) mithilfe der aufgestellten Gleichungen für  $K(x)$ ,  $K_v(x)$  und  $K_f(x)$  in Teilaufgabe a). Vergleichen Sie die Ergebnisse auch mit den Ergebnissen der Aufgabe 1.

### 5. Erlösfunktion

- a) Der Zusammenhang zwischen Absatzmenge und Erlös  $E$  kann in diesem Fall ebenfalls durch einen Funktionsterm dargestellt werden. Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion  $E(x)$  (für die Situation des Zuckerwattenverkaufs) an. Was für eine Funktion liegt hier vor?
- b) Veranschaulichen Sie die Erlösfunktion mithilfe einer Wertetabelle in einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem. Wählen Sie dabei für die Absatzmenge auf der  $x$ -Achse einen Maßstab von  $1 \text{ cm} \hat{=} 50 \text{ ME}$  (Zuckerwatte) und für den Erlös auf der  $y$ -Achse einen Maßstab von  $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ GE}$  (Euro).
- c) Lesen Sie aus der Zeichnung die Einnahmen (den Erlös) für die am ersten und zweiten Tag hergestellten und verkauften 200 bzw. 400 Zuckerwatteportionen ab.
- d) Überprüfen Sie die abgelesenen Werte aus Teilaufgabe c) durch Berechnung mithilfe der aufgestellten Gleichung für  $E(x)$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse auch mit den Ergebnissen der Aufgabe 2.

## 6. Gewinnfunktion

- a) Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe 4 bzw. 5 aufgestellten Funktionen  $E(x)$  und  $K(x)$  die Gleichung der Gewinnfunktion  $G(x)$ .
- b) Übertragen Sie die in Aufgabe 4 bzw. 5 angefertigten Graphen der Kostenfunktion  $K(x)$  und der Erlösfunktion  $E(x)$  in ein gemeinsames rechtwinkliges Koordinatensystem (Maßstab:  $1 \text{ cm} \hat{=} 50 \text{ ME}$  (Zuckerwatte) auf der  $x$ -Achse und  $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ GE}$  (Euro) auf der  $y$ -Achse).
- c) Die beiden Graphen der Funktionen  $E(x)$  und  $K(x)$  schneiden sich in genau einem Punkt  $G$ . Interpretieren Sie diesen Schnittpunkt  $G$  im Sachkontext.
- d) Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetabelle den Graphen der Gewinnfunktion  $G(x)$  in das Koordinatensystem von Teilaufgabe b) ein.
- e) Lesen Sie aus der Zeichnung die Nullstelle der Funktion  $G(x)$  ab und interpretieren Sie diese im Sachkontext. Beachten Sie auch den Verlauf der Graphen von Kosten- und Erlösfunktion.
- f) Lesen Sie aus der Zeichnung den Gewinn des Zuckerwattenverkaufs für den ersten und zweiten Tag und den maximal möglichen Gewinn ab.
- g) Bestätigen Sie durch Rechnung mithilfe der Gleichung  $G(x)$  die in Teilaufgabe f) abgelesenen Werte. Vergleichen Sie diese auch mit den Ergebnissen der Aufgabe 3.
- h) Kennzeichnen Sie in der Zeichnung am Graphen von  $G(x)$  bzw. an den Graphen  $E(x)$  und  $K(x)$  auf zwei Arten den Gewinn, den die Zuckerbäckerer beim Verkauf von Zuckerwatte am ersten und zweiten Tag erzielt hat, sowie den maximal möglichen Gewinn.