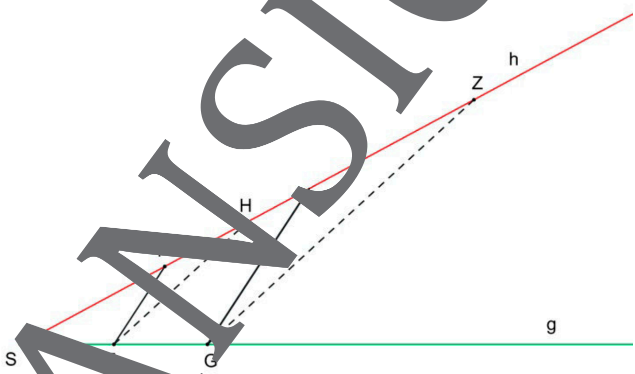
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Weiterführende trigonometrische Aufgaben

Förderung der Kompetenzen Begründen und Beweisen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek I[illegible]

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900[illegible]
Fax +49 71[illegible]-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Schirin Orth
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Weiterführende trigonometrische Aufgaben

1. Flächen im Sehnenvieleck

   b) Das Viereck ABCD hat die Eckpunkte A (0|0), B (1|0), C (cos(x)|sin(x)) und D (cos(60°)|sin(60°)). Wie muss x gewählt werden, damit das Viereck den größtmöglichen Flächeninhalt hat?

   c) Begründe mit Hilfe von a): Unter allen Sehnenzwölfecken ist das regelmäßige Zwölfeck das flächengrößte.

   d) Das Viereck ABCD hat die Eckpunkte A (0|0), B (1|0), C (cos(x)|sin(x)) und D (cos(α)|sin(α)). Wie muss x in Abhängigkeit von α gewählt werden, damit das Viereck den größtmöglichen Flächeninhalt hat?

   e) Begründe mit Hilfe von c): Unter allen Sehnen-n-Ecken ist das regelmäßige n-Eck das flächengrößte.

2. Trigonometrische und geometrische Konstruktion dreier gleichlanger Teilstrecken

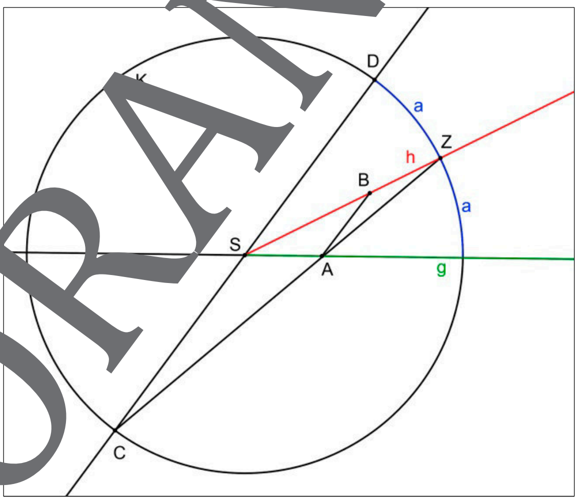


Abb. 1

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Trigonometrie
- Kommunikation: Lösungswege präsentieren, begründend argumentieren
- Problemlösen: Beweis führen im Spezialfall und in der Verallgemein[illegible]ung; Rü[illegible]kgri[illegible] Additionstheoreme und weitere Sätze
- Modellierung: Aufstellen je einer Funktionsgleichung mit und oh[illegible] Paramet[illegible] Aufstellen je einer Geradengleichung
- Medien: Tafel, Formelsammlung
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Schülervortrag
- Inhalt in Stichworten: Maximieren einer Vierecksfläche mit fest[illegible] und variab[illegible]en Eckpunkten, Übertragung der Ergebnisse auf ein Se[illegible]zwölfeck [illegible] ein Sehnen-n-Eck; Konstruktion eines Streckenzuges aus 3 gleichlang[illegible] Teilstrecken nach Vorgabe einer Konstruktionsbeschreibung bzw. als zentri[illegible] Streck[illegible] Bestätigung der Richtigkeit der vorgegebenen Konstruktion mi[illegible] Methoden der ele[illegible]taren Analysis

Autor: Roland Schröder

Lösung

1. a) $\cos(60°) = \frac{1}{2}, \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

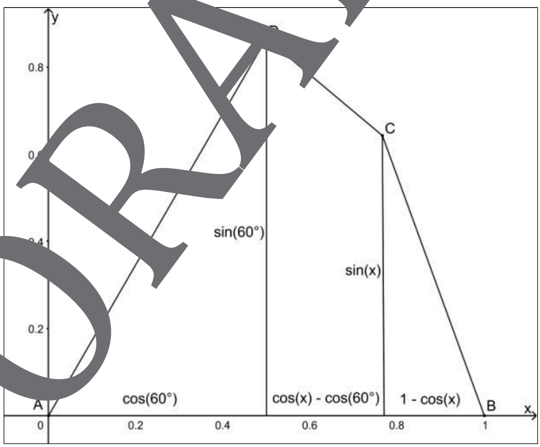


Abb. 2

Das Viereck setzt sich aus zwei Dreiecken und einem Trapez zusammen.
Allgemein gilt bekanntlich:

$$F_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2}, \quad F_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Dabei sind a und c die zwei parallelen Seiten eines Trapezes, h die Höhe jeweils und g die Grundseite eines Dreiecks.

Für jedes x ist daher die gesamte Fläche (mit a = sin(60°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und der Trapezhöhe h = cos(x) - sin(60°) = cos(x) - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und c = sin(x) für das mittlere Trapez gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(x) \right) \cdot \left(\cos(x) - 0{,}5 \right) + \sin(x) \cdot \left(1 - \cos(x) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin(x)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \right) + \sin(x) - \sin(x)\cos(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) \right)$$

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x) \right)$.

Da ein Maximum gesucht wird, liefert der Ansatz:

$0 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x) \right)$,

der zu $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und x = 30° führt, das gewünschte Ergebnis, da die 2. Ableitung von f an der Stelle x = 30° kleiner 0 ist.

Für jedes x ist analog zu a) die gesamte Fläche gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\cdot\Big(\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)+\big(\sin(\alpha)+\sin(x)\big)\\
&\qquad\cdot\big(\cos(x)-\cos(\alpha)\big)+\sin(x)\cdot\big(1-\cos(x)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\cos(\alpha)\sin(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(x)+\sin(x)\cos(x)\\
&\qquad -\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(x)\cos(\alpha)+\sin(x)-\sin(x)\cos(x)\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\sin(\alpha)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\cos(\alpha)+\sin(x)\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\sin(\alpha)\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot\big(1-\cos(\alpha)\big)\big)
\end{aligned}
$$

Dann ist $f'(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\cdot\big(-\sin(\alpha)\cdot\sin(x)+\cos(x)\cdot\big(1-\cos(\alpha)\big)\big)$.

Wie in a): Der Ansatz $0=\frac{1}{2}\cdot\big(-\sin(\alpha)\cdot\sin(x)+\cos(x)\cdot\big(1-\cos(\alpha)\big)\big)$

führt zu:

$\tan(x)=\dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ und mit einem Halbwinkelsatz (Formelsammlung)

zu $x=\frac{\alpha}{2}$, was wieder ein Maximum ist für α kleiner oder gleich 90°.

d) Die Punkte B (1|0), C (cos(x)|sin(x)) und D (cos(α)|sin(α)) liegen auf einem Kreis um A. Für $\alpha=\dfrac{360°}{n}$ ergeben n zu ABCD kongruente Vierecke ein Sehnen-2n-Eck, das für den gleichen Wert von x wie unter c) einen maximalen Flächeninhalt hat.

Da unter c) $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ist, ergibt sich ein regelmäßiges 2n-Eck als flächengrößtes unter allen Sehnenvielecken.