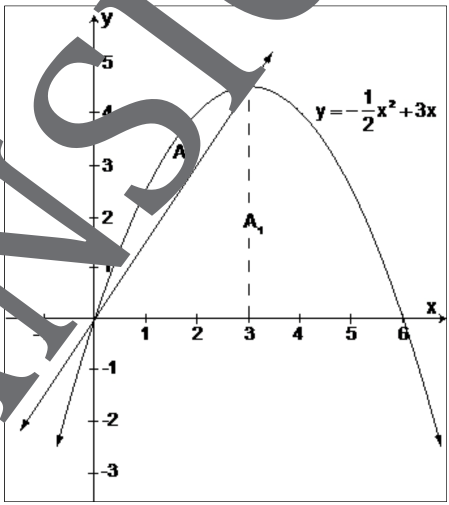
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Flächenberechnung

Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst
Bildnachweis Titel: Carlo Vöst
Korrektorat: Daniel Fässler

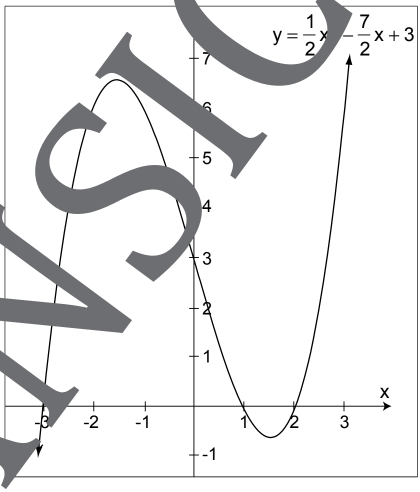
Flächenberechnung

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}5x + 3$.

Eine Kurvendiskussion ergibt: Nullstellen: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ sowie

$$HP\left(-\frac{1}{3}\sqrt{21} \approx -1{,}53 \middle| 3 + \frac{7}{9}\sqrt{21} \approx 6{,}56\right),\ TP\left(\frac{1}{3}\sqrt{21} \approx 1{,}53 \middle| 3 - \frac{7}{9}\sqrt{21} \approx -0{,}56\right)$$

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Kurve G_f, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = -1$ einschließen.



$$A = \int_{-2}^{-1} \left(0{,}5x^3 - 3{,}5x + 3\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{7}{4} - 3 - 2 + 7 + 6 = \frac{51}{8}$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die G_f mit der x-Achse einschließt.

$$A = \left|\int_{-3}^{1} \left(0{,}5x^3 - 3{,}5x + 3\right) dx\right| + \left|\int_{1}^{2} \left(0{,}5x^3 - 3{,}5x + 3\right) dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}\right| + \left|\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + 3x\right]_{1}^{2}\right| = 16 + \frac{3}{8} = \frac{131}{8}$$

c) Gegeben ist jetzt noch die Funktion g durch $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die G_f und G_g im II. Quadranten miteinander einschließen.

Zuerst muss man durch Gleichsetzen $f(x) = g(x)$ die Schnittstellen von G_f und G_g berechnen: −2, 0, 3. Dann kann der Flächeninhalt berechnet werden:

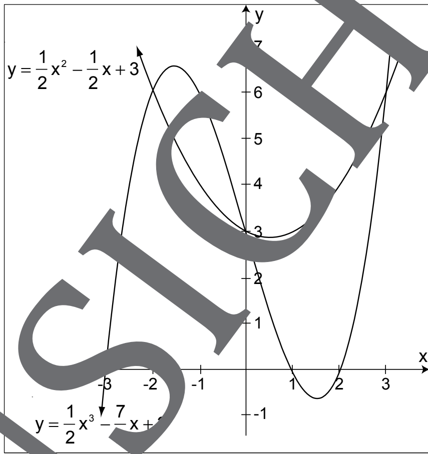
$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{-2}^{0} g(x)\,dx\right|$$

$$\overset{\text{Regel}}{=} \left|\int_{-2}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right|$$

$$= \left|-2 - \frac{4}{3} + 6\right| = \frac{8}{3}$$



d) Berechnen Sie den Inhalt der Flächenstücke, die G_f und G_g im I. bzw. IV. Quadranten miteinander einschließen.

Auch jetzt kann man mit der „Formel“ $A = \left|\int_0^3 f(x) - g(x)\,dx\right|$ arbeiten, weil

bei der Differenzbildung die Rechteckshöhen, die unter der x-Achse liegen, positiv zählen (doppeltes Minus) und so automatisch richtig diese Rechtecke addiert werden.

$$A = \left|\int_0^3 f(x) - g(x)\,dx\right| = \left|\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\frac{81}{8} - \frac{27}{6} - \frac{27}{2}\right| = \frac{63}{8}$$

e) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_f und G_g miteinander einschließen.

$$A = \frac{8}{3} + \frac{63}{8} = \frac{253}{24}$$

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f:\ x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - 12$.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Kurve G_f, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 2$ einschließen.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Kurve G_f, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $x = 1$ einschließen.

   c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Kurve G_f, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 5$ einschließen.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\ x \mapsto 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

   Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Kurve G_f, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = 5\pi$ einschließen.

3. Gegeben sind die Funktionen:

   a) $f:\ x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

   b) $f:\ x \mapsto -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

   c) $f:\ x \mapsto x^3 - 7x^2 + 6x$

   Berechnen Sie jeweils den Inhalt der Fläche, welche von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

4. Gegeben ist die Funktion $f:\ x \mapsto -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}$.

   a) Skizzieren Sie den Graphen G_f und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

   b) Eine Ursprungsgerade g geht durch den Scheitel S der Parabel; diese Gerade zerlegt die Fläche A (von a)) in zwei Teilflächen.
   Berechnen Sie das Verhältnis: größere Teilfläche zur kleineren Teilfläche.

5. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2$ und der Winkelhalbierenden des I. Quadranten eingeschlossen wird.

6. Gegeben ist die Funktion $f:\ x \mapsto 3x^2 -$ [illegible]
   Bestimmen Sie ein $b > 0$ so, dass das von der positiven x-Achse, der positiven y-Achse, dem Graphen und der Geraden mit der Gleichung $x = b$ begrenzte Flächenstück den Inhalt 8 [FE] hat.

7. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ und $g(x) = 2x^2$.
   Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Flächenstücke, in die G_g diejenige Fläche zerlegt, die von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

8. a) Gegeben sind die Funktionen $f:\ x \mapsto x - x^3$ und $g:\ x \mapsto -1{,}5x^2$.
   Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den Graphen G_f und G_g begrenzt wird.

   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von G_f, der Geraden mit der Gleichung $x = -2$ und der auf der x-Achse gelegenen Strecke mit den Endpunkten $(-2\,|\,0)$ und $(1\,|\,0)$ begrenzt wird. Eventuelle Symmetrieeigenschaften sind bei der Integration nutzbringend zu verwerten.

   c) Ohne Integration – also mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse – ist auf möglichst einfache Weise der Inhalt derjenigen Fläche zu berechnen, welche die Tangente an G_f in $P(1\,|\,0)$ mit G_f einschließt.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: argumentieren, berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Probleme erkunden und Lösungsstrategie entwickeln
- Modellierung: −
- Medien: Taschenrechner, CAS-Rechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Anwendung des HDI auf die Berechnung von Flächen, welche 1 oder 2 Graphen einschließen können

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - 12$

   a) Eine Faktorisierung des Funktionsterms (z. B. mit dem CAS-Rechner) ergibt: $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)(x-3)(x+2)$

   Also sind die Nullstellen: $x_1 = -2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4$

   $$A_a = \left|\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x\right]_{-1}^{2}\right|$$

   $$= \left|\left(-2 + \frac{20}{3} + 2 - 24\right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + 12\right)\right| = \frac{231}{8}$$

b) $A_b = \left|\int\limits_{-3}^{-2} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx\right|$

$= \left|\left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x\right]_{-3}^{-2}\right| + \left|\left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x\right]_{-2}^{1}\right|$

$= \frac{227}{24} + \frac{225}{8} = \frac{679}{8}$

c) $A_c = \left|\int\limits_{2}^{3} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{3}^{4} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{4}^{5} f(x)\,dx\right| = \frac{43}{24} + \frac{11}{24} + \frac{67}{24} = \frac{121}{24}$

2. $f:\ x \mapsto 2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ hat die Nullstellen $x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$A = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi}\left(2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx - \int\limits_{2\pi}^{4\pi}\left(2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx + \int\limits_{4\pi}^{5\pi}\left(2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx$

$= \left[-4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} - \left[-4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{2\pi}^{4\pi} + \left[-4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{4\pi}^{5\pi}$

$= -4\cdot\cos\pi + 4\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 4\cdot\cos(2\pi) - 4\cdot\cos\pi - 4\cdot\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) + 4\cdot\cos(2\pi)$

$= -4\cdot(-1) + 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 4\cdot 1 - 4\cdot(-1) - 4\cdot 0 + 4\cdot 1 = 16 + 2\sqrt{3}$

3. a) $f:\ x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Nullstellen (CAS): $x_1 = -1;\ x_2 = 3$

$A = \int\limits_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3}$

$= \left(-\frac{1}{6}\cdot 27 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{16}{3}$

6. $f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$

Bedingung:

$$\int_0^b \left(3x^2 - 12x + 12\right) dx = 8 \overset{\text{HDI}}{\Leftrightarrow} \left[x^3 - 6x^2 + 12x\right]_0^b = 8 \Leftrightarrow b^3 - 6b^2 + 12b - 8 = 0$$

Durch Erraten: $b_1 = 2$

Polynomdivision:

$$\left(b^3 - 6b^2 + 12b - 8\right) : (b-2) = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2 \Rightarrow b_{2,3} = 2, \text{ also } b = 2.$$

7. $A = \int_0^4 x^3 - 8x^2 + 16x\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2\right]_0^4 = 64 - \frac{512}{3} + 128 = \frac{64}{3}$

Schnittstellen von f und g:

$x^3 - 8x^2 + 16x = 2x^2$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 10x + 16\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 8$

$A_1 = \int_0^2 \left(x^3 - 8x^2 + 16x - 2x^2\right) dx$

$= \int_0^2 \left(x^3 - 10x^2 + 16x\right) dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{10}{3}x^3 + 8x^2\right]_0^2$

$= 4 - \frac{80}{3} + 32 = \frac{28}{3}$

$A_2 = A - A_1 = \frac{36}{3}$; $A_1 : A_2 = 28 : 36 = 7 : 9$