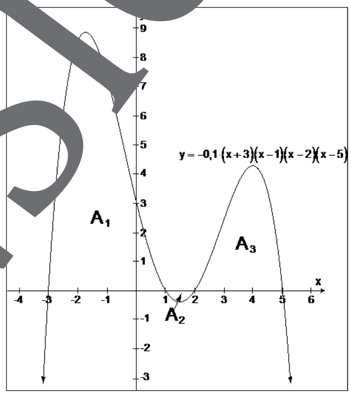
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Das bestimmte Integral

Definition, Eigenschaften und Anwendungen

VORANSICHT

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin C
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst
Bildnachweise: Carlo Vöst
Korrektorat: Daniel Fässler

VORANSICHT

Das bestimmte Integral

Definition des bestimmten Integrals

Man nennt den gemeinsamen Grenzwert A der Obersumme O_n und der Untersumme U_n für $n \to \infty$ einer Funktion f in einem bestimmten Intervall [a;b] das **bestimmte Integral** von f(x) über dem Intervall [a;b] (oder zwischen den Grenzen a und b).

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x = "\lim_{n\to\infty}" O_n = "\lim_{n\to\infty}" U_n$$

[Man liest: „Integral von a bis b von f(x) dx“]

Bemerkungen:

„$\int$“ entstand aus „S“ (Summe); „dx“ entstand aus „Δx“;

„a“ ist die **untere Integrationsgrenze**, „b“ die **obere Integrationsgrenze**;

„f(x)“ heißt hier **Integrandenfunktion**;

„x“ ist die **Integrationsvariable** (dies wird durch „dx“ zum Ausdruck gebracht)

„dx“ ist das **Integrationsdifferential**.

„M_i “ gibt das *Maximum* (größten Funktionswert) im betreffenden Intervall Δx an, demnach beschreibt der Term $M_i \cdot \Delta x$ den Inhalt einer Rechtecksfläche mit der Höhe M_i und der Breite Δx.

„m_i “ gibt das *Minimum* (kleinsten Funktionswert) im betreffenden Intervall Δx an, demnach beschreibt der Term $m_i \cdot \Delta x$ den Inhalt einer Rechtecksfläche mit der Höhe m_i und der Breite Δx.

„O_n“ ist die sogenannte *Obersumme*, die sich aus der Summe der Rechtecksflächen $M_i \cdot \Delta x$ ergibt.

„U_n“ ist die sogenannte *Untersumme*, die sich aus der Summe der Rechtecksflächen $m_i \cdot \Delta x$ ergibt.

VORANSICHT

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Umkehrung der Integrationsrichtung

$$\boxed{\text{Für } a<b \text{ gilt:} \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Beweis:

$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$, da $a<b$ ist und deshalb Δx negativ ist, ergibt sich die Behauptung.

Linearitätseigenschaften

$$\boxed{\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\ c\in\mathbb{R}}$$

Beweis:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\cdot M_i \cdot \Delta x \overset{\text{Auskl.}}{=} \lim_{n\to\infty} c\cdot\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$

$$= c\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(analog: „}m_i\text{“)}$$

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} M_{i,f} + \sum_{i=1}^{n} M_{i,g}\right)\cdot\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} M_{i,f}\cdot\Delta x + \sum_{i=1}^{n} M_{i,g}\cdot\Delta x\right)$$

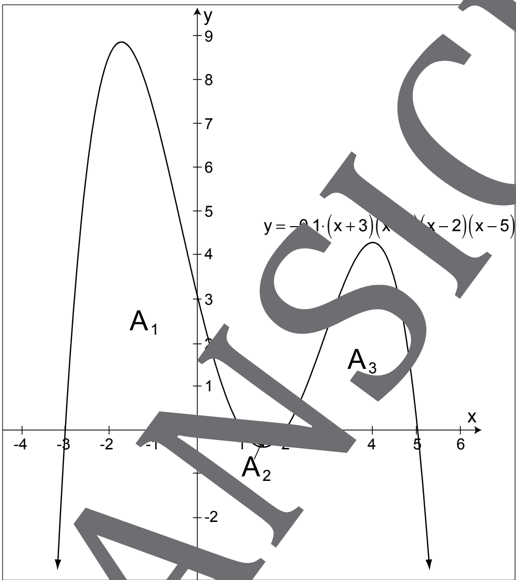
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_{i,f}\cdot\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_{i,g}\cdot\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

VORANSICHT

Aufgaben

1. Die Abbildung zeigt den Graph der Funktion
$f: x \mapsto -0{,}1 \cdot (x+3)(x-1)(x-2)(x-5)$:



Ferner sind ge[illegible]: $A_1 = \frac{[illegible]04}{7[illegible]}$, $A_2 = \frac{157}{600}$ und $A_3 = \frac{1503}{200}$

Berechnen [illegible]

a) $\int_{-3}^{2} f([illegible]) \, d[illegible]$

b) $\int_{1}^{[illegible]} [illegible](x)\,dx$

c) $\int_{[illegible]}^{5} f(x)\,dx$

2. Gegeben ist der abgebildete Graph G_f einer Funktion f.

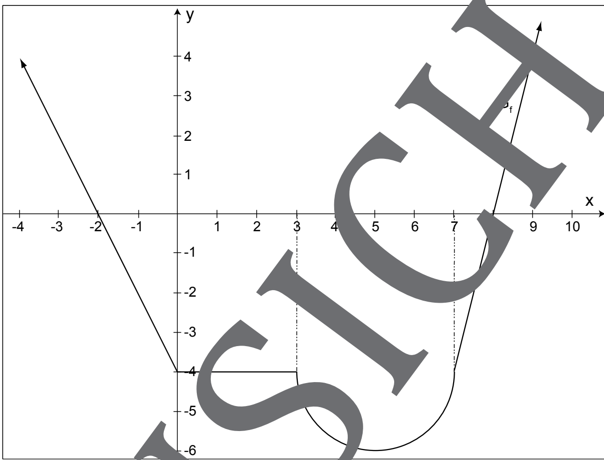
   Berechnen Sie:

   a) $\int\limits_{-3}^{2} f(x)\,dx$

   b) $\int\limits_{-4}^{9} f(x)\,dx$

   c) $\int\limits_{4}^{8} f(x)\,dx$

   d) $\int\limits_{5}^{-3} f(x)\,dx$



3. Gegeben ist: $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx = -2$. Was kann man aus dieser Angabe geometrisch-anschaulich folgern?

4. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin(2x)$. Es gilt: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 1$

   a) Berechnen Sie: $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$, $\int\limits_{0}^{\frac{5}{2}\pi} f(x)\,dx$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} f(x)\,dx$

   b) Bestimmen Sie a bzw. b: $\int\limits_{a}^{2\pi} f(x)\,dx = 1$; $\int\limits_{-\pi}^{b} f(x)\,dx = -1$

VORANSICHT

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: Argumentieren, berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Probleme erkunden und Lösungsstrategie entwickeln, Theoriekenntnisse auf konkretes Problem anwenden
- Modellierung: Zusammenhang zwischen Integralbegriff und geometrischer Darstellung
- Medien: Taschenrechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Definition des bestimmten Integrals in Zusammenhang mit seiner graphisch-geometrischen Bedeutung, Eigenschaften des bestimmten Integrals, Anwendungen der Theorie auf verschiedene Problemstellungen

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. a) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \frac{1504}{75} - \frac{157}{600} = \frac{475}{24}$

   b) $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = -\frac{157}{600} + \frac{1503}{200} = \frac{544}{75}$

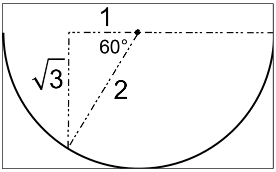
   c) $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = \frac{1504}{75} - \frac{157}{600} + \frac{1503}{200} = \frac{2048}{75}$

2. a) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 4 = -11$

   b) $\int_{-4} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 4 - 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 = -28 - 2\pi$

   c) $\int^{8} f(x)\,dx = -4\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} - \frac{120°}{360°}\cdot 2^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = -14 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

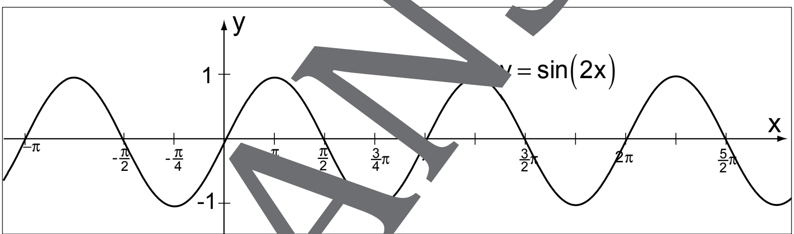
VORANSICHT



d) $\int\limits_{5}^{-3} f(x)\,dx = 2\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi+3\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 23+\pi$

3. $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx = -2$ bedeutet, dass die Flächenbilanz zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zwischen den Grenzen -1 und 3 -2 ist, d.h. es liegen 2 FE zwischen den Grenzen -1 und 3 mehr unter der x-Achse als darüber.

4.



a) Aufgrund der geometrisch-anschaulichen Bedeutung des bestimmten Integrals ergibt sich:

$\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0$; $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx = -1$; $\int\limits_{0}^{\frac{5}{2}\pi} f(x)\,dx = 1$; $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} f(x)\,dx = -1$

b) $\int\limits_{a}^{2\pi} f(x)\,dx = -1 \;\Leftrightarrow\; a=\frac{3}{2}\pi \vee a=\frac{1}{2}\pi \vee a=-\frac{1}{2}\pi \vee \ldots$

$\Leftrightarrow\; a=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \;\;(k\in Z)$

$\int\limits_{-\pi}^{b} f(x)\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; b=0 \vee b=\pi \vee b=2\pi\ldots \;\Leftrightarrow\; b=k\cdot\pi \;\;(k\in\mathbb{Z})$