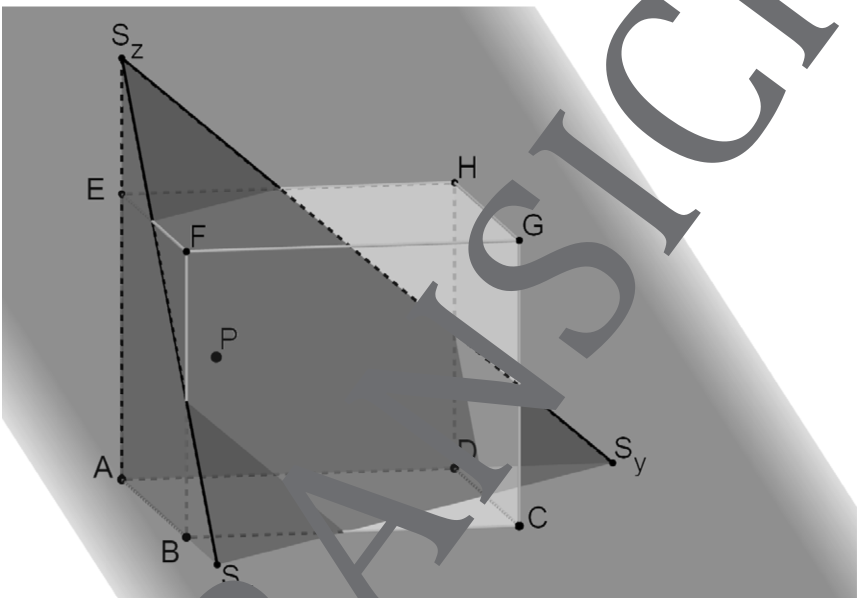
Geometrische Wahrscheinlichkeit beim Einheitswürfel

Günther Weber



Bezeichnet man drei Zufallszahlen aus dem Intervall [0;1[mit x, y und z, so können sie die Koordinaten eines Punktes P im Raum darstellen, der innerhalb des Einheitswürfels liegt. Wird zudem die Summe k der drei Zufallszahlen gebildet, so stellt die Gleichung $Z: x+y+z=k, k \in [0;3]$ eine Ebene im Raum dar, die den Einheitswürfel in zwei Teilkörper zerlegt. Das Verhältnis von Teilkörper und Einheitswürfel entspricht dann einer geometrischen Wahrscheinlichkeit, dass die Summe dreier beliebiger Zufallszahlen kleiner oder gleich k ist. Mit der Anzahl der Schnittpunkte der Ebene Z mit den Kanten des Einheitswürfels, den Teilflächen der Oberfläche des Teilkörpers und dem Flächeninhalt der Schnittfläche von Ebene und Würfel lassen sich Ereignisse definieren, deren (bedingte) Wahrscheinlichkeit Ihre Schülerinnen und Schüler bestimmen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Dauer:	4–5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Methoden:	Bildanalyse, Computer- und Softwareeinsatz, Diskussion, Übung
Materialart:	Bildimpuls, Definition, Differenzierungsmaterial, GeoGebra-Datei, Grafik
Thematische Bereiche:	Geometrische Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm, Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, (Hessesche) Normalform der Ebenengleichung, Spurpunkte von Ebenen, Länge einer Strecke, Volumen einer Pyramide (als Funktion), Flächeninhalt von Drei- und Sechsecken

Fachliche Hinweise

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen ohne Schwierigkeiten Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten mit unterschiedlichen Lösungsverfahren.
Die Schülerinnen und Schüler können Abstände von Punkten im Raum bestimmen, sie kennen Spurpunkte von Ebenen und können diese bestimmen. Die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken und Sechsecken im Raum ist ebenso bekannt wie die Berechnung des Volumens einer Dreieckspyramide. Idealerweise sind ausreichende Kenntnisse eines Tabellenkalkulationsprogramms, z. B. Excel, und von Nutzung von GeoGebra vorhanden.

Die Schülerinnen und Schüler berechnen das Volumen eines Körpers, der durch eine Ebene vom Einheitswürfel abgetrennt wird, und fassen dieses Volumen als geometrische Wahrscheinlichkeit auf. Diese Wahrscheinlichkeiten werden zur Berechnung von Ereignissen benutzt, die sich auf die Spurpunkte der Ebene bzw. auf die Schnittfläche von Ebene und Würfel beziehen. Die Lernenden festigen hierbei ihr Können und Wissen über die Bestimmung von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten durch Aufzählung von Ereignismengen und Zeichnen von Baumdiagrammen.

Lehrplanbezug

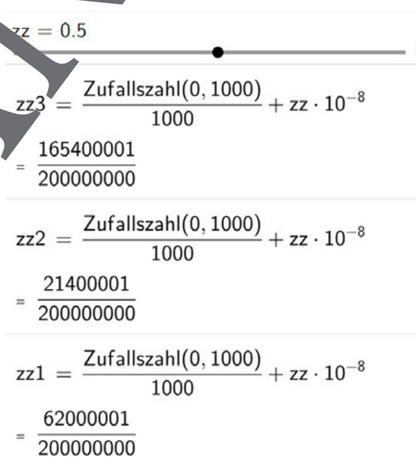
In den Kernlernplänen NRW https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf (aufgerufen am 15.10.2024) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler …

- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln.
- Aus dem Inhaltsfeld „Analytische Geometrie“ kommen folgende Kompetenzerwartungen hinzu:
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten,
- berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext,
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum.

Didaktisch-methodische Hinweise

Bei **Aufgabe 1a)** werden die drei Zufallszahlen in GeoGebra durch den Befehl $\frac{\text{zufallszahl}(0{,}1000)}{1000} + zz \cdot 10^{-8}$ erzeugt, wobei zz ein Schieberegler ist, der Zahlen im Intervall [0;1] mit der Schrittweite 0,01 darstellt. Durch Veränderung der Zahl auf dem Schieberegler werden dann jeweils neue Zufallszahlen manuell oder durch Animation des Schiebereglers automatisch erzeugt. Hierbei kann die Schnelligkeit über den Menüpunkt „Geschwindigkeit“ unter den Einstellungen des Schiebereglers eingestellt werden.



Teilen Sie den Schülerinnen und Schülern vor der Bearbeitung von **Aufgabe 1a)** mit, wie die Simulation mit der GeoGebra-Datei „simulation.ggb“ funktioniert. Ebenso gehen Sie bei **Auf-**

gabe 2) anhand der Datei *„rel. Häufigkeit Summe dreier Zufallszahlen.xlsx“* darauf ein, wie Zufallszahlen mithilfe einer Tabellenkalkulation erzeugt werden. Insbesondere weisen Sie darauf hin, dass für eine Zahl, die in einem bestimmten Intervall liegt, die „und“-Bedingung in der „wenn“-Bedingung verwendet wird. Wichtig ist es, dass Sie Ihre Schülerinnen und Schüler daran erinnern, dass durch das Drücken der F9-Taste eine Neuberechnung der Zufallszahlen stattfindet.

Ist der Begriff der geometrischen Wahrscheinlichkeit den Schülerinnen und Schülern unbekannt, so erläutern Sie anhand der Beispiele von **M 1** den Begriff. Bei der Formel kann auf die Formel für Laplace-Experimente hingewiesen werden. Veranschaulichen Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 2b)** die drei verschiedenen „Pyramidenarten“. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen besprechen Sie zusammen mit den Lernenden, wie das Volumen des von der Ebene aus dem Einheitswürfel ausgeschnittenen Körpers berechnet wird. Nach dem Aufstellen der stückweise definierten Funktion können Sie anhand des Graphen darauf eingehen, dass die Funktionen an den „Nahtstellen“ knickfrei ineinander übergehen. Die Bearbeitung von **Aufgabe 3)** erfordert ein umfangreiches Baumdiagramm. Sind die Jugendlichen nicht mit der Anfertigung umfangreicher Baumdiagramme vertraut, so teilen Sie das Material **M 1** aus. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen können die Ereignisse und die Pfadwahrscheinlichkeiten auch noch zusammen eingetragen werden. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 4b)** sollten die Ergebnisse aus **Aufgabe 4a)** besprochen werden. Die Ereignisse, insbesondere die Ereignisse E5 und E6 bei **Aufgabe 4b)** können, falls die Zeit knapp wird, auf zwei Gruppen aufgeteilt werden. Ebenso kann eine Bearbeitung der **Aufgaben 5) und 6)** durch zwei Gruppen erfolgen. Eine Gruppe bearbeitet die Aufgaben für eine dreieckige, die andere Gruppe für die sechseckige Schnittfläche. Die Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke (mit den Methoden der analytischen Geometrie) kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Hier können die Rechenwege bezüglich der Anschaulichkeit und Schwierigkeit gegenübergestellt werden.

M 1 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Bei einem zufälligen Experiment, das mit geometrischen Mitteln beschrieben werden kann, kann die Ergebnismenge Ω als geometrische Figur, z.B. eine Strecke, eine Fläche oder ein Körper aufgefasst werden. Die unendlich vielen Elementarereignisse haben alle die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit.

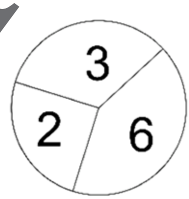
Ein Ereignis E lässt sich dann als Teilfigur (Teilstrecke | Teilfläche | Teilkörper) der geometrischen Figur Ω (Gesamtstrecke | Gesamtfläche | Gesamtkörper) auffassen.

Die geometrische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E lässt sich dann berechnen durch die Formel $P(E) = \frac{\text{Maßzahl für die Teilfigur E}}{\text{Maßzahl für die Gesamtfigur } \Omega}$

Die Form der Teilfigur bezogen auf die Gesamtfigur ist unerheblich.

Beispiele:

Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren, die mit 2, 3 bzw. 6 beschriftet sind. Die zum Sektor gehörigen Mittelpunktswinkel betragen 90 °, 120 ° bzw. 150 °. Wird das Glücksrad gedreht und bleibt zufällig an einem der Sektoren stehen, so gilt:

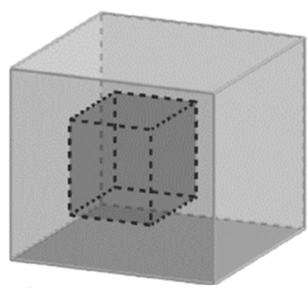


$P(2) = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$, $P(3) = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$ und $P(6) = \frac{150°}{360°} = \frac{5}{12}$.

Auf einer 6 cm langen Strecke $\overline{AB}$ befindet sich eine 1,2 cm lange Teilstrecke $\overline{CD}$. Ist E das Ereignis, dass ein zufällig aus der Strecke $\overline{AB}$ ausgewählter Punkt ein Punkt der Teilstrecke $\overline{CD}$ ist, so ist $P(E) = \frac{1{,}2\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{5}$

In einem Würfel mit der Kantenlänge $l = 10\text{ cm}$ liegt ein Quader mit den Kantenlängen $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ und $c = 5\text{ cm}$ Ist E das Ereignis, dass ein zufällig aus dem Würfel ausgewählter Punkt ein Punkt des inneren Quaders ist, so ist

$P(E) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5\text{ cm}^3}{1000\text{ cm}^3} = \frac{100\text{ cm}^3}{1000\text{ cm}^3} = \frac{1}{10}$

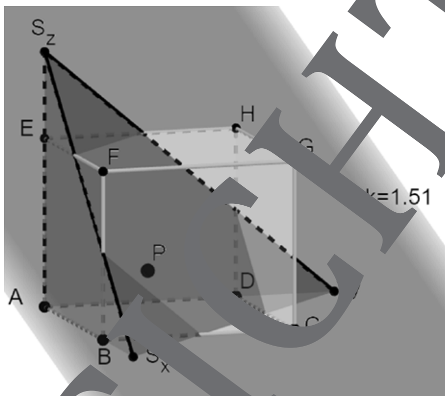


Grafiken: Günther Weber

Die geometrische Wahrscheinlichkeit kann aber auch bei anderen Maßeinheiten wie z.B. Zeiten angewendet werden.

M 3 Aufgaben

Drei Zufallszahlen aus dem Intervall [0;1[werden zufällig erzeugt. Bezeichnet man die Zufallszahlen mit x, y und z, so können sie die Koordinaten eines Punktes P im Raum darstellen. Dieser Punkt liegt in einem Einheitswürfel (Würfel mit der Kantenlänge 1), der im 1. Oktanten liegt und dessen Kanten auf den Koordinatenachsen liegen.



Grafik: Günther Weber

Bezeichnet man die Summe der drei Zufallszahlen mit k, so stellt die Ebene $Z: x+y+z=k, k \in [0;3]$ die Gleichung eine Ebene im Raum dar.

1.

a) Simulieren Sie mithilfe der Datei „*Simulation.ggb*“ das Erzeugen eines beliebigen Punktes P sowie der zugehörigen Ebene Z, indem Sie den Wert auf dem Schieberegler ändern. der Punkt. Der Punkt A ist der Ursprung und die Punkte S_x, S_y und S_z die Spurpunkte der Ebene Z. Beschreiben Sie die Lage der Pyramide $AS_xS_yS_z$ bezüglich des Einheitswürfels und die Schnittpunkte der Ebene Z mit den Kanten des Einheitswürfels.

b) Für $k=0$ ($k=1$, $k=2$, $k=3$) verläuft die Ebene Z durch einen/mehrere Eckpunkt(e) des Einheitswürfels. Geben Sie die Eckpunkte an.

c) Fassen Sie einige der Beobachtungen aus Aufgabenteil a) und b) in der folgenden Tabelle zusammen.

	Anzahl der Schnittpunkte der Ebene Z mit den Kanten des Einheitswürfels	Form der Schnittfläche der Ebene mit dem Würfel
$k \in]0;1]$		
$k \in]1;2[$		
$k \in [2;3[$		

RAAbits Online
@RAABE

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen. Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen

Testen Sie RAAbits Online 14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

RAAbits Online – Das Portal für Unterrichtsmaterialien und Schulorganisation