C.6.25

Vermischte Aufgaben

Autofahren und Verreisen – Textaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alfred Müller

© nicolasdecorte / iStock / Getty Images Plus

Anschauliche Beispiele aus der Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler, untersucht mit den Werkzeugen der Stochastik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Untermalt mit kleinen Geschichten stellen die Textaufgaben dieser Materialien die Jugendlichen vor die Aufgabe, sich Gedanken über Stichproben und Hypothesentests zu machen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen anzuwenden und Vierfeldertafeln zu erstellen. Anhand von Beispielen, die sich um Verkehrszählungen, die Wartezeit bei Staus, das Überbuchen von Flügen oder die Regenwahrscheinlichkeit am Urlaubsziel drehen, stellen die Lernenden ihr Wissen unter Beweis.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 10/11/12/13

Kompetenzen: Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz

Methoden: Datenauswertung, Diskussion

Thematische Bereiche: Binomialverteilung, Normalverteilung, Hypothesentests, Näherung von Moivre-Laplace, Vierfeldertafel

Fachliche Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler sind mit den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut. Sie wissen, was eine Hypothese ist und können entscheiden, ob sie abzulehnen ist oder nicht. Auch Wissen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Signifikanzniveaus und die Moivre-Laplace-Näherungen sind für die Bearbeitung einiger Aufgaben Voraussetzung.

Auf einen Blick

Abzählen und Mittelwerte – verschiedene Rechenaufgaben

M 1 Autofahren und Wahrscheinlichkeiten

M 2 Verreisen und Wahrscheinlichkeiten

Benötigt:
- ☐ Formelsammlung
- ☐ Wahrscheinlichkeitstabellen
- ☐ Taschenrechner oder PC

Erklärung zu den Symbolen

● einfaches Niveau	■ mittleres Niveau	▲ schwieriges Niveau

Autofahren und Wahrscheinlichkeiten

M 1

1. Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten von Ereignis A die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B nicht beeinflusst und umgekehrt. Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
   a) Die Ereignisse A, B, C sind stochastisch unabhängig. Welche Gleichungen müssen gelten?
   b) Wie viele Gleichungen müssen für n stochastisch unabhängige Ereignisse nachgeprüft werden?
   c) Welcher Unterschied besteht zwischen unvereinbaren und unabhängigen Ereignissen?

2. Verkehrszählungen an der Autobahn haben ergeben, dass unter den vorbeikommenden Fahrzeugen 30 % Lastwagen und 10 % Motorräder sind.
   a) Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Motorräder in einer Stichprobe von 200 aufeinander folgenden Fahrzeugen an.
      i) Mit welchen Stichprobenergebnissen ist in der [illegible] Umgebung des Erwartungswertes zu rechnen?
      ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein Stichprobenergebnis in diesem bestimmten Bereich?
   b) Nach einiger Zeit wird die Vermutung laut, dass der Lkw-Anteil am Verkehrsaufkommen zugenommen habe. Man gebe aufgrund einer Stichprobe der Länge n = 200 einen geeigneten Signifikanztest auf dem 5-%-Niveau an. Ist das Stichprobenergebnis von 70 beobachteten Lkw signifikant?
   c) Von einem bestimmten Zeitpunkt an werden die Fahrzeuge registriert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
      i) das erste Motorrad spätestens als zehntes Fahrzeug passiert,
      ii) der dritte Lkw frühestens als fünftes und spätestens als neuntes Fahrzeug gezählt wird,
      iii) unter den nächsten zehn Fahrzeugen genau fünf Lastwagen sind,
      iv) unter den nächsten zehn Fahrzeugen fünf Lastwagen und zwei Motorräder sind,
      (v) sich unter den nächsten zehn Fahrzeugen weder ein Lastwagen noch ein Motorrad befindet.
   d) Die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Motorrad spätestens das k-te vorbeikommende Fahrzeug ist, sei größer als 95 %. Bestimmen Sie den Wert für k.

3. Herr Henke ist Busfahrer. Er weiß, dass er für die Fahrt vom Marktplatz bis zur Endhaltestelle „Neue Siedlung“ 30 Minuten benötigt, falls er nicht in einen Stau gerät. Im Moment gibt es Baustellen an der Angerleite und am Bannberg. An der Angerleite beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Stau 10 %, am Bannberg 5 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass er an beiden Baustellen warten muss, beträgt nur 1 %. Jeder dieser Staus verlängert seine Fahrtzeit um 5 Minuten.

   a) Beschreiben Sie mit den Ereignissen A: „Wartezeit an der Angerleite“ und B: „Wartezeit am Bannberg“ die folgenden Ereignisse in Worten:

   $E_1 = A \cap B \quad E_2 = A \cup B, \qquad E_3 = A \setminus B$

   b) Erstellen Sie mit den Ereignisse A und B eine Vierfeldertafel.
      i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Herr Henke pünktlich an?
      ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verspätet er sich um 5 Minuten?

   c) Herr Henke ist 5 Minuten zu spät angekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er an der Angerleite warten müssen?

   d) Herr Henke fährt in den nächsten Tagen 10-mal vom Marktplatz zur Endhaltestelle. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Henke
      i) genau 8-mal,
      ii) mindestens 9-mal,
      iii) höchstens 7-mal,
      iv) immer pünktlich ankommt.

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto an einer Messstelle mit überhöhter Geschwindigkeit vorbeifährt, sei p.

   a) Interpretieren Sie für eine Stichprobe von n = 50 Autos folgende Ausdrücke:

   $$P_1 = \binom{50}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{40} \qquad P_2 = p^{10} \cdot (1-p)^{40}$$

   $$P_3 = (1-p)^{20} \cdot \binom{20}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{20}$$

   b) Wie groß muss der Wert für p mindestens sein, damit in einer Stichprobe von n = 20 Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens ein Auto zu schnell fährt?

   c) Man kann davon ausgehen, dass der Anteil der zu schnell fahrenden Autos bei p = 0,15 liegt. Durch Ankündigung der Geschwindigkeitsmessung soll bei einer Stichprobe der Länge n = 100 auf dem 5-%-Signifikanzniveau nachgewiesen werden, dass die Ankündigung der Geschwindigkeitsmessung zu einer Senkung der Schnellfahrerzahlen geführt hat.
   Wie muss die Entscheidungsregel lauten?
   Der Anteil der Schnellfahrer ist auf p = 0,1 gesunken. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dies bei obiger Entscheidungsregel nicht erkannt?

Verreisen und Wahrscheinlichkeiten

M 2

1. Der Inhaber R eines kleinen Reisebüros weiß aus langjähriger Erfahrung, dass 80 % seiner Kunden das Reiseziel S bevorzugen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter den nächsten
      i) 20 Buchungen genau 16 für S,
      ii) 100 Buchungen mindestens 75 für S?
   b) Wie viele Buchungen müssen mindestens vorgenommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens eine Buchung nicht auf S lautet?

2. Zur Vorinformation liegen bei R Prospekte über S aus. Jeder Besucher des Reisebüros nimmt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % eine solche Schrift mit. Da eine Nachlieferung noch nicht eingetroffen ist, hat R heute nur noch 46 Schriften über S. Wie viele Besucher dürfen heute höchstens das Reisebüro besuchen, wenn das Informationsmaterial über S mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 9[illegible] % ausreichen soll?

3.
   a) In der Hauptreisezeit wird für Menschen mit Reiseziel S ein Großraumflugzeug benutzt, das 330 Plätze besitzt. In der Regel werden 8 % der Buchungen kurzfristig wieder rückgängig gemacht. Daher wird eine Überbuchung (d. h. eine Buchung von mehr Plätzen als eigentlich vorhanden sind) zugelassen. Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, damit das Platzangebot mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % reicht?
   b) Die Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass wegen der günstigen Zollbestimmungen im Flugzeug unter anderem jeder zweite Fluggast eine Flasche des Getränks A und jeder fünfte Fluggast eine Flasche Parfüm der Marke B kauft. Wie viele Flaschen von jeder Sorte müssen mindestens an Bord eines vollbesetzten Flugzeuges gebracht werden, damit die Kaufwünsche der Fluggäste mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % erfüllt werden können.

4. Regentage treten am Reiseziel S sehr selten auf, nämlich mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 1 %. Der Kunde K verbringt einen dreiwöchigen Urlaub (21 Tage) in S. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erlebt K während seines Urlaubs keinen Regentag?

5. Wegen der großen Hitze besitzt das Hotel am Reiseziel S Klimaanlagen. Es sind Anlagen zweier verschiedener Firmen installiert. Als einzige mögliche Ausfallursache sind Steuerchips bekannt, die mit einer Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ unabhängig voneinander ausfallen können. In einer der Anlagen sind vier, in der anderen zwei solche Chips verarbeitet. Die Klimaanlage ist betriebsbereit, wenn mindestens die Hälfte der Chips funktioniert. Für welchen Wert von q ist die Anlage mit den zwei Chips der mit den vier Chips vorzuziehen?