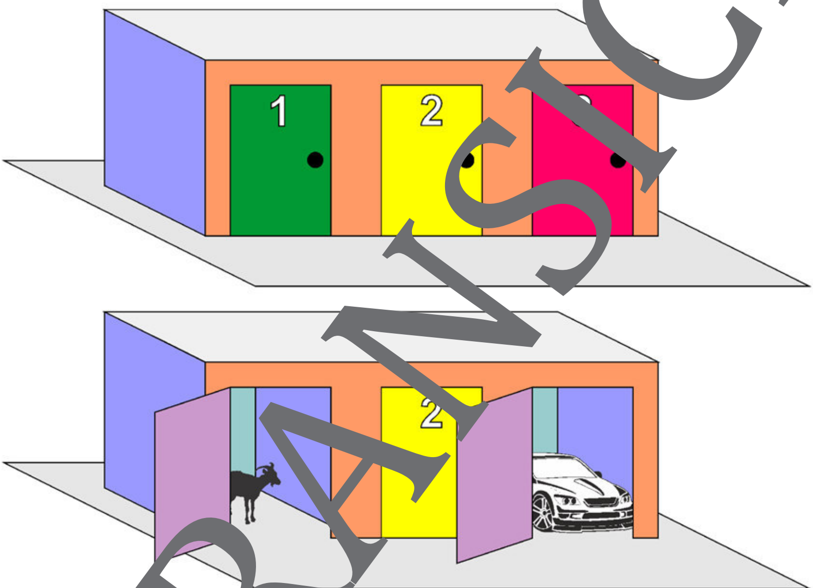
R.21

Anwendungsaufgaben

Der Zufall in konkreten Anwendungen – Ziegenproblem, Monte-Carlo-Methode und Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Dr. Jürgen Franke



Was hat die Kreiszahl Pi mit K[illegible]tropfen und radioaktiver Zerfall mit Münzen zu tun? Durch verblüffende Experimente und Versuche entdecken die Lernenden, wie man Größen und Funktionen aus mathematischen und physikalischen Kontexten mit statistischen Mitteln abschätzen kann. So lernen sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung sowie stetige Zufallsgrößen von einer anderen Seite kennen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 12/13

Dauer: 4–5 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: Mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien, Zusammenhänge herstellen

Methoden: Auswertung, Computer- und Softwareeinsatz, Diagrammerstellung

Materialart: Differenzierungsmaterial, Excel, Informationstext, Tippkarte

Inhalt: bedingte Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm, Binomialverteilung, stetige Zufallsgröße, Erwartungswert, Standardabweichung, Ableitungsfunktion, Integral, Vertrauensintervall, Parameterschätzung

Weiterführende Medien

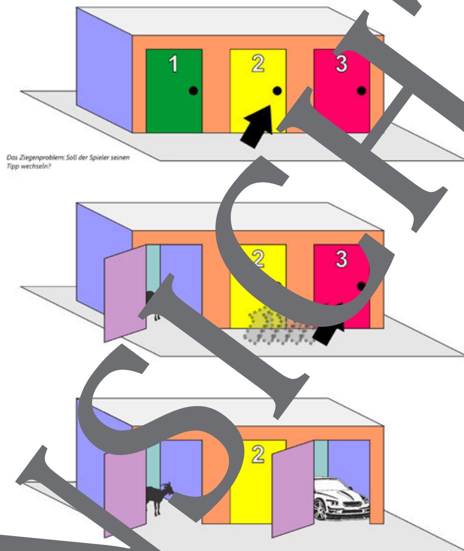
Internetadressen

- https://www.katharinengymnasium.de/wolf/web/MonteCarlo.html
  (C. Wolfseher)
  Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung der Kreiszahl π

M 1 Drei Türen, ein Gewinn – das Ziegenproblem

Original

Das Ziegenproblem ist nach der Verlosung eines Gewinns in einer amerikanischen Fernsehshow benannt. Die spielende Person konnte zwischen drei Türen wählen. Hinter einer befand sich ein Gewinn in Form eines Automobils, hinter den beiden anderen je eine Ziege als Niete. Wenn die spielende Person eine Tür gewählt hatte, wurde diese aber nicht geöffnet, sondern der Moderator öffnete von den beiden anderen Türen diejenige, hinter der eine Ziege stand. Der Person wurde dann die Option angeboten, ihren Tipp auf die andere noch geschlossene Tür zu wechseln. Die Frage ist nun, soll die spielende Person wechseln, oder ist es egal?



Das Ziegenproblem: Soll der Spieler seinen Tipp wechseln?
Grafik: Dr. Jürgen Franke

Versuch (Paararbeit)

Werfen Sie einen Würfel, um die Tür zu bestimmen, hinter der das Auto steht: Augenzahlen 1/2 bedeutet 1. Tür, Augenzahlen 3/4 2. Tür und 5/6 3. Tür. Würfeln Sie erneut, um den Tipp der spielenden Person analog zu bestimmen. Bestimmen Sie, ob die Person das Auto gewinnt, wenn sie die Tür wechselt. Wiederholen Sie das Experiment zwanzig Mal und bestimmen Sie so die Wahrscheinlichkeit, dass die Person das Auto gewinnt, wenn sie wechselt.

Aufgabe

Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, wenn die Person die Tür wechselt (nicht wechselt).

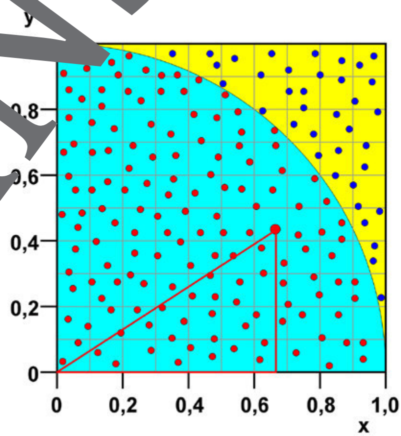
Monte-Carlo-Methode

M 2

Das nach dem weltberühmten Casino von Monte-Carlo in Monaco benannte Verfahren bedeutet, dass man durch Zufallsexperimente Größen ermitteln kann, die auf anderem Weg nicht zugänglich sind. Z. B. könnte Ihnen eine Funktion vorliegen, die Sie auf analytischem Weg nicht integrieren können, deren Integral aber dennoch ermittelt werden soll. Angenommen, Sie zeichnen die Funktion in ein Koordinatensystem, markieren die Integrationsgrenzen und legen so die Fläche fest, die dem gesuchten Integral entspricht und legen die Zeichnung bei Regen nach draußen. Die Regentropfen werden Ihr Blatt, dessen Fläche als Rechteck leicht bestimmt werden kann, gleichmäßig treffen. Wenn Sie nun in der Lage wären, jeden Tropfen zu zählen und auch festzustellen, welcher davon die von Ihnen markierte Fläche getroffen hat, könnten Sie aus dem Verhältnis der Treffer zu allen Tropfen auf dem Blatt auf die markierte Fläche schließen.

Bestimmung der Zahl π

Es werden für jede Runde zwei Zufallszahlen x und y jeweils zwischen 0 und 1 ausgelost. Daraus werden die Koordinaten eines Punktes gebildet. Dieser trifft folglich zufällig irgendwo auf das Quadrat, welches durch die Eckpunkte (0|0), (0|1), (1|1) und (1|0) gegeben ist. Innerhalb des Quadrats ist ein Viertel eines Einheitskreises mit Mittelpunkt in (0|0) markiert. Über den Flächenvergleich Viertelkreis und Quadrat kann die Zahl π bestimmt werden. Bei vielen Auslosungen befindet sich ein Teil der Punkte in der Kreisfläche, die anderen außerhalb. Ob ein Punkt zur Kreisfläche gehört, wird dadurch bestimmt, dass man nach Pythagoras seinen Abstand vom Ursprung berechnet. Ist der Abstand ≤ 1, dann liegt der Punkt auf der Kreisfläche, ist der Abstand größer, liegt er außerhalb. Den Vorgang wiederholt man n-mal.



Ermittlung der Zahl π nach der Monte-Carlo-Methode
Grafik: Dr. Jürgen Franke

Fläche des Viertelkreises $A_K = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$

Fläche des Quadrats $A_Q = 1$

Abstand eines Punktes (x|y) vom Ursprung ist $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit $0 \le x \le 1$ und $0 \le y \le 1$.

Ergebnismenge eines Versuchs: $S = \{s \le 1; s > 1\}$

Wahrscheinlichkeit eines Treffers im Viertelkreis nach Flächenanteil: $P(s \le 1) = \frac{A_K}{A_Q} = \frac{\pi}{4}$

Anzahl aller Punkte: n

Anzahl Punkte im Viertelkreis: $n_{s\le1}$

Wahrscheinlichkeit eines Treffers im Viertelkreis experimentell: $P(s \le 1) = \frac{n_{s\le1}}{n}$

Trefferwahrscheinlichkeit aus Fläche und Experiment gleichsetzen:

$\frac{\pi}{4} = \frac{n_{s\le1}}{n}$ $\pi = 4\frac{n_{s\le1}}{n}$

Experiment

Führen Sie die soeben beschriebene Methode[1] in einem Tabellenkalkulationsprogramm aus. Optimal wäre es, wenn Sie ein kurzes Makro programmieren. Es geht aber auch ohne Makros. Legen Sie eine neue Tabelle an. In die erste Zeile schreiben Sie in die Zellen A1 bis F1 die Spaltenüberschriften. In die zweite Zeile schreiben Sie in die Zellen D2 und E2 jeweils eine Null. In die dritte Zeile kommt in die Zellen A3 und B3 die Funktion ZUFALLSZAHL(). C3 berechnet den Abstand des durch A3 und B3 ausgelosten Punkts vom Ursprung über ein rechtwinkliges Dreieck. D3 enthält eine WENN-Abfrage. Bei Treffer wird der Zählerstand in der darüberliegenden Zelle (D2) um eins erhöht, ansonsten unverändert übernommen und zählt so die Anzahl der Treffer. In E3 wird stets eins zu dem Wert in der darüberstehenden Zelle addiert und so die Anzahl der Zufallsexperimente gezählt. In der Zelle F3 wird dann π berechnet nach $\pi = 4\frac{n_{s\le1}}{n}$.

1 Grafische Darstellung der Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π
https://www.katharinengymnasium.de/wolf/web/MonteCarlo.html