

# Gesunder Schlaf – diskrete und stetige Zufallsgrößen

Mona Hitznauer



*Bild: Stephanie Pratt / Wikimedia Commons / Creative Commons Zero*

Und schon wieder klingelt der Wecker viel zu früh. Nur noch einmal umdrehen. Ich schlafe bestimmt nicht mehr ein. Kennen Sie das? Ihre Schüler und Schülerinnen garantiert. In den Mathe-Klassen setzen sich die Lernenden mit ihrem Schlaf auseinander und nutzen dabei verschiedene Werkzeuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei lernen sie auch, was gesunder Schlaf eigentlich bedeutet. Sie stärken ihre digitalen Kompetenzen mit dem Sammeln und Auswerten eigener Daten, verbessern ihre Teamarbeit und erstellen dynamische Visualisierungen.

# Gesunder Schlaf – diskrete und stetige Zufallsgrößen

## Oberstufe (erhöhtes Anforderungsniveau)

Mona Hitznauer

Hinweise	1
M1 Diskrete und stetige Zufallsgrößen	3
M2 Zufallsgrößen unterscheiden	5
M3 Normalverteilung	6
M4 Wie steht es um Ihren Schlaf?	8
M5 Klassenumfrage zum Thema Schlaf	10
M6 Abschlusstest	11
Lösungen	12

### Die Schülerinnen und Schüler lernen:

diskrete und stetige Zufallsgrößen bzw. Verteilungen zu unterscheiden. Sie lernen die Normalverteilung mit ihren Parametern kennen und untersuchen ihren Graphen mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware. Die Jugendlichen setzen sich mit ihrem eigenen Schlafverhalten auseinander und erkennen die Wichtigkeit von gesundem und ausreichendem Schlaf. In einer Klassenumfrage nutzen sie digitale Werkzeuge zum Sammeln und Auswerten der Daten und stärken ihre digitalen Kompetenzen und Fähigkeit zur Teamarbeit.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

MB Merkblatt

LEK Lernerfolgskontrolle



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau



Zusatzaufgaben



Gruppenarbeit

Thema	Material	Methode
Diskrete und stetige Zufallsgrößen	M1	AB, MB
Zufallsgrößen unterscheiden	M2	AB
Normalverteilung	M3	AB
Parameter der Normalverteilung an Dichtefunktion ablesen	M4	AB
Daten sammeln und auswerten	M5	AB
Abschlusstest	M6	AB, LEK

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** diskrete und stetige Zufallsgrößen, Wertemenge, Dichte- und Verteilungsfunktion, Normalverteilung, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Histogramme, Graphen

**Medien:** z. B. GeoGebra, Excel, digitales Umfragetool

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit Symbolen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen

Ihre Schülerinnen und Schüler kennen diskrete Zufallsgrößen und können deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Tabelle oder Histogramm darstellen. Sie unterscheiden die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße von ihrer kumulativen Verteilungsfunktion. Insbesondere kennen sie die Binomialverteilung und deren Parameter.

### Lehrplanbezug

Im LehrplanPLUS des bayerischen Gymnasiums

<https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/13/mathematik>

(aufgerufen am 15.01.2024)

finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen im erhöhten Anforderungsniveau der 13. Klasse:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen anhand von Beispielen und nutzen zur Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Histogramme sowie die Graphen von Dichtefunktionen und kumulativen Verteilungsfunktionen.
- erläutern die grundlegenden Eigenschaften der Dichtefunktion und der kumulativen Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße sowie den Verlauf der zugehörigen Graphen, z. B. mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware. Sie entnehmen dem Term der Dichtefunktion den Erwartungswert und die Standardabweichung.

### Methodisch-didaktische Überlegungen

Die Materialien bauen aufeinander auf, allerdings können sie auch getrennt voneinander eingesetzt werden.

#### M1

Die **Aufgaben 1) und 2)** – Begriffe erklären – sind besonders für Lernschwächere konzipiert, damit die Lernenden die Begriffe einüben und scharf voneinander abgrenzen können bzw. sie nicht verwechseln. **Aufgabe 5a)** – Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben – stellt vermutlich für viele Jugendliche eine größere Herausforderung dar, hier können Sie bei lernschwächeren Gruppen im Vorfeld den Tipp geben, dass die Lösung

sehr einfach ist. **Aufgabe 6)** – Beweis – ist recht anspruchsvoll, hier können Sie auch die Integraldarstellung der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße verwenden.

### M2

Bei **Aufgabe 2)** – Stetige und diskrete Zufallsgrößen unterscheiden – werden die Werte beliebig genau gemessen. Machen Sie das den Lernenden am besten klar, bevor diese die Aufgabe bearbeiten.

### M3

Die **Aufgaben 1) und 2)** – Untersuchung der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße – sind ähnlich, nur dass **Aufgabe 1)** eine konkrete Dichtefunktion und **Aufgabe 2)** die allgemeine Dichtefunktion behandelt, daher eignet sie sich nicht zur Differenzierung nach Leistungsvermögen. Bei **Aufgabe 4)** – Animation der Verteilungsfunktion – ist es für die Schüler und Schülerinnen hilfreich, wenn sie wissen, dass GeoGebra die Verteilungsfunktion der Normalverteilung zeichnen kann mit dem Befehl „Normal(...)“.

### M4

**Aufgabe 3)** ist besonders wichtig für die Jugendlichen, die sich in diesem Material auch mit ihrem eigenen Schlaf auseinandersetzen. Falls ein Zeitmangel können Sie diese Aufgabe aber auch als Hausaufgabe vergeben.

### M5

Bei der Klassenumfrage sollten so viele Daten wie möglich gesammelt werden (mindestens 30 Werte pro Schlafparameter), damit die Normalverteilungen gut sichtbar werden. Wenn die Lerngruppe recht klein ist, können die Jugendlichen die Umfrage auch auf andere Gruppen bzw. Klassen erweitern. Alternativ können Sie auch Daten stellen, die sie z. B. mit Excel oder dem Berechnungsprogramm erzeugen können.

`<Erwartungswert>+<Standardabweichung>*STANDNORMINV(ZUFALLSZAHL())`

generieren.

### M6

Dieses Material dient in erster Linie als Lernerfolgskontrolle. Sie können aber auch einzelne Aufgaben davon als Übungsaufgaben oder Hausaufgabe heranziehen.

## Aufgaben

1. Recherchieren Sie die Begriffe „abzählbar unendliche Menge“ und „überabzählbar unendliche Menge“ und geben Sie jeweils Beispiele solcher Mengen an.
2. Erklären Sie die Begriffe „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ und „kumulative Verteilungsfunktion“ in Bezug auf eine diskrete Zufallsgröße.
3. Nehmen Sie Stellung zu den Aussagen und korrigieren Sie sie, wenn nötig.
  - a) Der Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Stelle  $x$  einer diskreten Zufallsgröße  $X$  gibt die Wahrscheinlichkeit  $P(X = x)$  an.
  - b) Der Wert der Dichtefunktion  $f$  an der Stelle  $x$  einer stetigen Zufallsgröße  $X$  gibt die Wahrscheinlichkeit  $P(X = x)$  an.
4. Durchschnittlich erreichen 40 % aller Menschen die empfohlene Tiefschlafdauer. Es werden 100 Personen im Schlaflabor untersucht. Eine Zufallsgröße  $X$  zählt die Anzahl der Personen, die die empfohlene Tiefschlafdauer aufweisen.
  - a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  an.
  - b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  als Histogramm dar.
  - c) Geben Sie die Funktion der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  an.
  - d) Stellen Sie die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  graphisch dar.
5. Der Schlaf von 100 Personen wird im Schlaflabor aufgezeichnet. Eine Zufallsgröße  $Y$  modelliert die Zeit bis zum ersten Aufwachen innerhalb eines Zeitintervalls von 8 Stunden.
  - a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y$  an.
  - b) Die Dichtefunktion von  $Y$  lautet  $f(x) = \frac{1}{8}$ .  
Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion.
6. Beweisen Sie, dass bei einer stetigen Zufallsgröße  $X$  für alle  $x$  aus ihrer Wertemenge stets  $P(X = x) = 0$  gilt.
7.  $X$  sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion  $f(x)$ . Das Intervall  $[a; b]$  ist in der Wertemenge von  $X$  enthalten. Beweisen oder Widerlegen Sie:  

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**