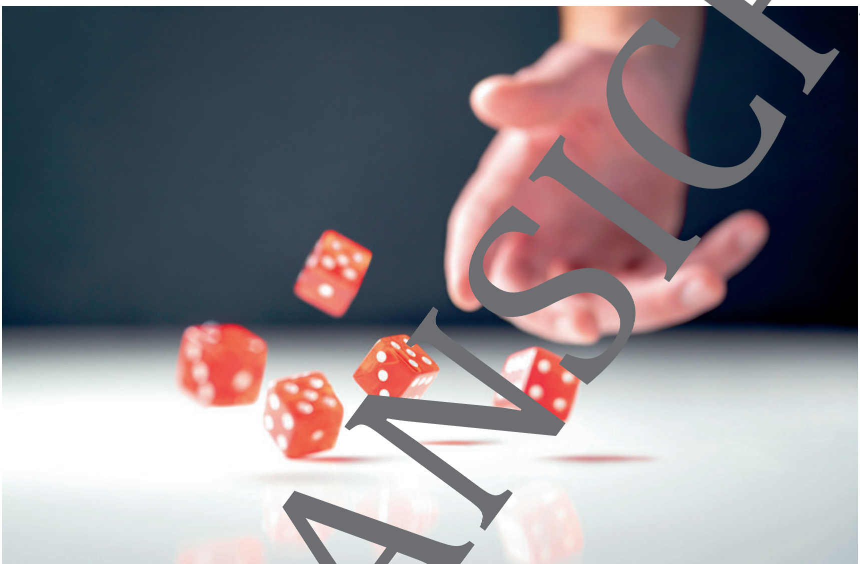
Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Alfred Müller



© Tero Vesalainen / iStock / Getty Images Plus

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist häufig nicht nur die Frage nach Erfolg oder Misserfolg relevant, sondern auch, wie viele Versuche es braucht, bis sich der erste Erfolg einstellt. Die Schülerinnen und Schüler lernen solche Wartezeitprobleme im Zusammenhang mit verschiedenen Zufallsexperimenten und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen. Vorgerechnete Beispiele demonstrieren den Lernenden verschiedene Lösungswege, ehe sie sich selbst daranmachen, Wartezeitprobleme der Pascalverteilung, der negativen Binomialverteilung und der geometrischen Verteilung zu bearbeiten.

Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Alfred Müller

M1 Wartezeit und geometrische Verteilung **1**

M2 Mittlere Wartezeit und Maßzahlen der geometrischen Verteilung **4**

M3 Weitere Wartezeitprobleme bei geometrischer Verteilung **6**

M4 Pascalverteilung und negative Binomialverteilung **18**

M5 Mittlere Wartezeit und Maßzahlen der Pascalverteilung **20**

M6 Weitere Wartezeitprobleme bei der Pascalverteilung **22**

M7 Wartezeit und vollständige Serie **28**

Lösungen **40**

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Wahrscheinlichkeitsrechnung in verschiedenen Varianten von Wartezeitproblemen einzusetzen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse **Bsp** vorgerechnetes Beispiel

Thema	Material	Methode
Wartezeitprobleme und geometrische Verteilung	M1, M3	AB, BA, Bsp
Maßzahlen der geometrischen Verteilung	M2	AB, Bsp
Wartezeitprobleme bei Pascalverteilung und negative Binomialverteilung	M4, M6	AB, Bsp
Mittlere Wartezeit und Maßzahlen der Pascalverteilung	M5	AB, Bsp
Wartezeit und vollständige Serie	M7	AB, BA, Bsp

Kompetenzprofil:

Inhalt: Wartezeitprobleme, Binomialverteilung, geometrische Verteilung, Pascalverteilung, negative Binomialverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme

Medien: Taschenrechner, Tabellenwerk

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Wartezeit und geometrischen Verteilung M1

Ein Bernoulli-Experiment werde so lange unabhängig durchgeführt, bis zum ersten Mal ein „Erfolg“ (alternativ: „Treffer“, „1“) eintritt.

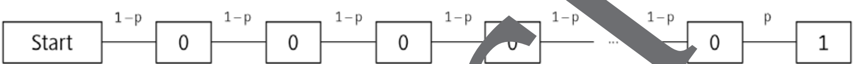
Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg sei jeweils:

P(„Erfolg“) = P(„Treffer“) = P(1) = p

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Misserfolg“ (alternativ: „Niete“, „0“) sei:

P(„Misserfolg“) = P(„Niete“) = P(0) = 1 - p

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Versuche an, bis zum ersten Male „Erfolg“ auftritt. Aus dem zugehörigen Baumdiagramm erkennt man:



Grafik: Günter Gerstbrein

Dem ersten Erfolg gehen (k – 1) Misserfolge voraus. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z gilt:

$P(Z=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p,\ \ k\in\mathbb{N}$

Eine Zufallsgröße Z mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **geometrisch verteilt** mit dem (Erfolgs-)Parameter p.

Anmerkungen:

1. Der Name **geometrische Verteilung** leitet sich von der Tatsache ab, dass zur Berechnung der Summe aller Wahrscheinlichkeiten die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe verwendet werden muss. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(Z=k)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p=p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+\ldots\right]=p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=1$$

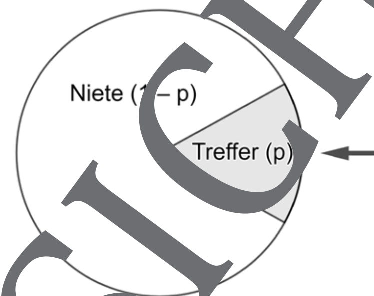
Wegen 0 < p < 1 bzw. 0 < 1 – p < 1 ist die geometrische Reihe konvergent, sodass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.
Die geometrische Reihe ist konvergent für 0 < x < 1 und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty}x^i=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Aufgaben

1. Geben Sie zur geometrischen Verteilung mit $p = 0{,}4$ die Wertetabelle der Verteilung und die kumulative Verteilungsfunktion an. Zeichen Sie ein Stabdiagramm und den Graphen der Verteilungsfunktion.

2. Auf einem Glücksrad ist wie in der nebenstehenden Skizze ein Sektor anders eingefärbt. Zeigt der Pfeil nach einer Drehung des Rades auf diesen Sektor, so spricht man von einem Treffer T, sonst von einer Niete N. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei p mit $0 < p < 1$.
   Das Glücksrad wird dreimal gedreht.



Grafik: Günter Gerstbrein

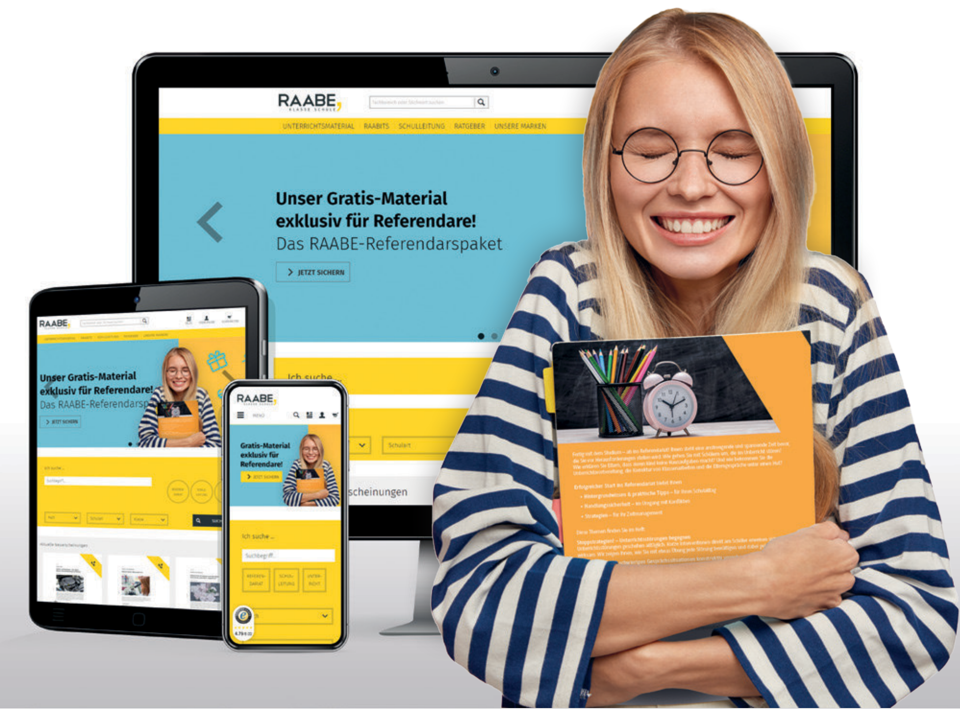
   a) Zeigen Sie, dass für das Ereignis E: „Genau zwei Treffer“ $P(E) = 3p^2 \cdot (1-p)$ gilt und bestimmen Sie den Wert für p so, dass $P(E)$ maximal wird.

   b) Das unter 2a) beschriebene Zufallsexperiment wird zu einem Glücksspiel verwendet. Man gewinnt, wenn sich das Ereignis E einstellt. Dazu wird $P(E) = \frac{4}{9}$ verwendet. Das Glücksspiel wird fünfmal gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   (i) nur einen Gewinn,
   (ii) den ersten Gewinn beim fünften Spiel,
   (iii) nur Gewinne?

   c) Wie oft darf das Glücksspiel höchstens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal gewinnt, unter 90 % bleibt?

RAABE
KLASSE SCHULE

Sie wollen mehr für Ihr Fach?
Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download
im RAABE Webshop.



- **Über 5.000 Unterrichtseinheiten**
  sofort zum Download verfügbar
- **Webinare und Videos**
  für Ihre fachliche und persönliche Weiterbildung
- **Attraktive Vergünstigungen**
  für Referendar:innen mit bis zu 15% Rabatt
- **Käuferschutz**
  mit Trusted Shops

Jetzt entdecken:

www.raabe.de