Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Carlo Vöst

Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Unterrichtsmaterial rund um Zufallsgrößen erarbeiten sich die Lernenden zunächst anhand von Beispielen zentrale Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Ferner wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie man sich durch verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten einen Überblick über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verschaffen kann. Nach einigen Übungsaufgaben steht am Ende der Einheit eine Lernerfolgskontrolle zur Verfügung.

RAABE
KLASSE SCHULE

Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Oberstufe (grundlegend)

Carlo Vöst

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

mit Zufallsgrößen in der Stochastik angemessen umzugehen. Die Lernenden erhalten einen Überblick über wichtige Konstrukte und Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Außerdem werden Sie in der graphischen Darstellung von Zufallsgrößen geschult.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt **LEK** Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Einführendes Beispiel	M1	AB
Erwartungswert	M2	AB
Varianz und Standardabweichung	M3	AB
Graphische Darstellungen von Zufallsgrößen	M4	AB
Aufgaben	M5	AB
Klassenarbeit	M6	LEK

Kompetenzprofil:

Inhalt: Grundsätzliche Definition der Zufallsgröße, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße, graphische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße
Medien: Taschenrechner
Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Erklärung zu den Symbolen:

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben — Alternative

M2 Erwartungswert

Beispiel

ZE: Einmaliges Werfen eines Laplace-Würfels. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Zufallsgröße X: „Gewinn oder Verlust nach folgendem Schema:

Ereignis {1} ergibt 1 € Gewinn,

Ereignisse {2} oder {3} ergeben jeweils 5€ Verlust,

Ereignisse {4}, {5} oder {6} ergeben jeweils 3€ Gewinn.

$$X: \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto -5 \\ 3 \mapsto -5 \\ 4 \mapsto 3 \\ 5 \mapsto 3 \\ 6 \mapsto 3 \end{cases} ;\ W_X = \{-5;\ 1;\ 3\}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der ZG X:

$$P(X=3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(X=1) = \frac{1}{6};\ P(X=-5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Wir betrachten jetzt einen Wert, der sich theoretisch beim unendlichen Wiederholen des zugrunde liegenden Experiments als Gesamtbilanz ergeben würde. Man kann diesen aus den Werten der ZG berechnen. Dabei muss man beachten, dass die Werte der ZG mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit auftreten, also multipliziert man jeden Wert der ZG X mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit

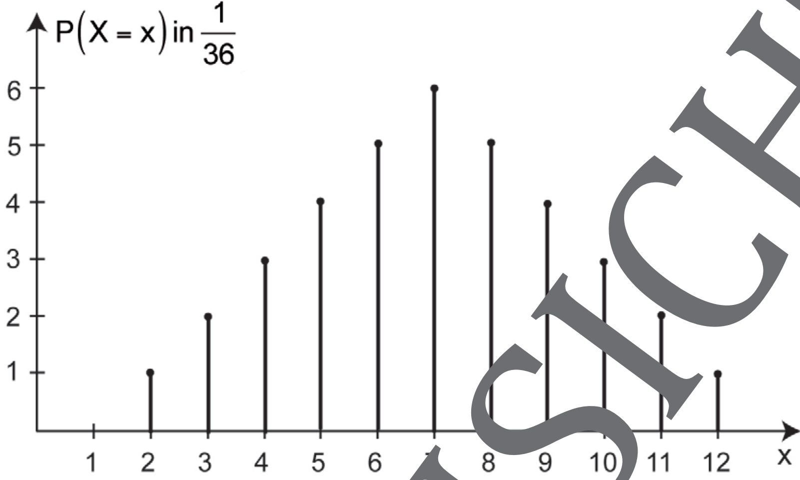
$$(-5\,€)\cdot\frac{2}{6} + 1\,€\cdot\frac{1}{6} + 3\,€\cdot\frac{1}{2} = 0\,€,$$

d. h. auf lange Sicht gesehen gewinnt man bei diesem Spiel nichts, verliert aber auch nichts; man sagt deshalb, dieses Glücksspiel ist **fair**.

Definition:

Unter dem Erwartungswert einer Zufallsgröße versteht man diejenige Zahl, die „durchschnittlich“ als „theoretischer“ Wert der ZG zu erwarten ist; man bezeichnet den Erwartungswert der Zufallsgröße X mit „ $E(X)$ „ oder auch mit „ μ “.
Ist der Erwartungswert eines Gewinns/Verlusts eines Glücksspiels Null, dann nennt man das Spiel fair.

Stabdiagramm



Grafik: Carlo Vöst

Histogramm

Für die Zeichnung werden Erwartungswert und Standardabweichung berechnet:
Der Erwartungswert ergibt sich zu

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

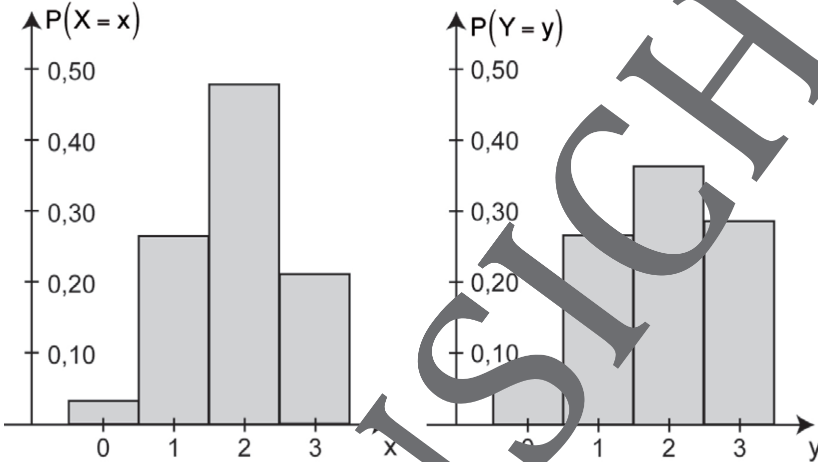
Für die Varianz gilt

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2\cdot\frac{1}{36} + (3-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (4-7)^2\cdot\frac{3}{36} + (5-7)^2\cdot\frac{4}{36} + (6-7)^2\cdot\frac{5}{36} + (7-7)^2\cdot\frac{6}{36} + (8-7)^2\cdot\frac{5}{36} + (9-7)^2\cdot\frac{4}{36} + (10-7)^2\cdot\frac{3}{36} + (11-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (12-7)^2\cdot\frac{1}{36} = \frac{35}{6}.$$

Also erhalten wir für die Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{210} \approx 2{,}42\,.$$

4. Unten ist das Histogramm der Zufallsgröße X und das Histogramm einer anderen Zufallsgröße Y mit dem gleichen Erwartungswert abgebildet. Erklären Sie, wie man anhand der Abbildung erkennen kann, dass Y eine größere Varianz als X besitzt.



Grafik: Carlo Vöst

5. In einer Urne befinden sich 3 rote und 7 weiße Kugeln.
Franz entnimmt der Urne nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen.
Die Zufallsgrößen X und Y werden wie folgt festgelegt:
X:= „Anzahl der roten Kugeln (unter den 3 gezogenen Kugeln)“

$$Y := \begin{cases} 2, & \text{falls mind. 2 rote Kugeln nacheinander gezogen werden} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y.
b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

Es wird nun folgendes Spiel vereinbart:
Falls Franz mindestens zwei rote Kugeln nacheinander zieht, hat er gewonnen, andernfalls hat er verloren.

c) Berechnen Sie, wie viele Gewinnspiele Franz bei n Spielen zu erwarten hat.
d) Franz muss bei jedem Spiel 3 € Einsatz bezahlen, der beim Verlust des Spiels verfällt. Bestimmen Sie, wie viel man ihm pro Gewinnspiel ausbezahlen muss, damit das Spiel fair ist.