Verteilungsfunktionen – Bernoulli-Experimente und Gaußsche Glockenkurve

Dr. Jürgen Franke

Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Unterrichtsmaterial werden Binomial- und Normalverteilung ausführlich untersucht. Die Schülerinnen und Schüler leiten anhand anschaulicher Bernoulli-Experimente die beiden zu diesen Verteilungen gehörenden Funktionen her. Die Jugendlichen befassen sich im Zuge dessen mit kumulierten Verteilungen und Vertrauensintervallen. Die einzelnen Abschnitte sind mit anwendungsorientierten Übungsaufgaben unterfüttert, sodass die Lernenden die Möglichkeit zur Einübung der erworbenen Fähigkeiten haben.

RAABE
KLASSE SCHULE

Verteilungsfunktionen – Bernoulli-Experimente und Gaußsche Glockenkurve

Oberstufe (grundlegend)

Dr. Jürgen Franke

M1 Bernoulli-Experimente	**1**
M2 Binomialverteilung und Normalverteilung	**15**
M3 Vertrauensintervalle	**20**
Lösungen	**26**

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Bernoulli-Experimente, Bernoulli-Ketten und die Binomialverteilung kennen. Sie wenden ihre neuen Kenntnisse an einfachen Zufallsexperimenten an. Den Lernenden wird klar, dass man unter bestimmten Bedingungen die Binomialverteilung mit der Normalverteilung annähern kann. Darüber hinaus vertiefen sie dieses Wissen in Anwendungsaufgaben.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Bernoulli-Experimente	M1	AB
Binomialverteilung und Normalverteilung	M2	AB
Vertrauensintervalle	M3	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Bernoulli-Versuch, Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung, Normalverteilung, Vertrauensintervalle
Medien: TR, GeoGebra, Excel
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Erklärung zu den Symbolen

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben — Alternative

Bernoulli-Experimente M1

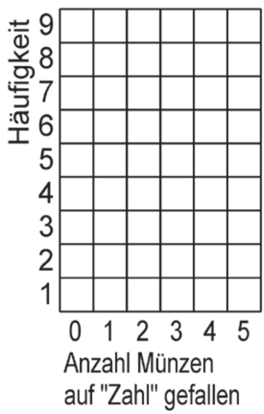
Bernoulli-Experimente haben nur zwei mögliche Ergebnisse. Z. B. S = {0; 1} oder S = {Wappen; Zahl} oder S = {gewonnen; verloren} oder S = {getroffen; daneben} usw. Das gewünschte Ereignis wäre dann z. B. E = {1}, oder E = {Zahl} oder E = {gewonnen} oder E = {getroffen}, usw. Das einfachste Beispiel für ein Bernoulli-Experiment wäre ein Münzwurf. Da fällt die Münze auf „Wappen“ oder auf „Zahl“. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ergibt sich anhand der Geometrie der Münze zu jeweils zu 0,5.

Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n bezeichnet n unabhängig voneinander stattfindende Bernoulli-Experimente. Wenn man diese Bernoulli-Kette als ein gesamtes Experiment betrachtet, dann erhält man 2^n Ergebnisse, bzw. 2^n Variationen aus den einzelnen Bernoulli-Ergebnissen. Die Frage ist nun, wie oft das gewünschte Ereignis E = {gewonnen} der beiden Bernoulli-Ergebnisse eingetroffen ist. Oder anders gefragt: Wie viele Variationen gibt es, die 0-mal, 1-mal, 2-mal, bis n-mal „gewonnen“ enthalten?

Aufgabe

Experiment

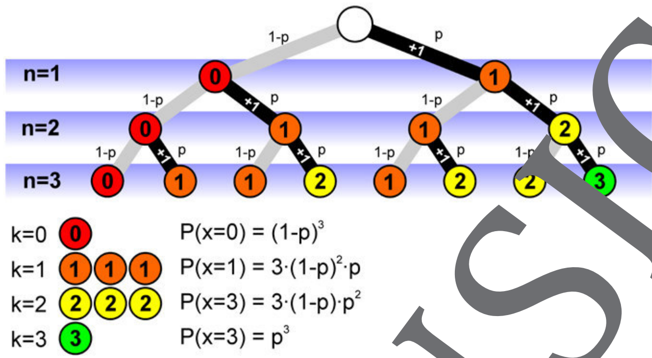
1. Nehmen Sie fünf 1-Cent-Münzen und werfen Sie diese auf den Tisch. Zählen Sie die Anzahl der auf „Zahl“ gefallenen Münzen und markieren Sie im Diagramm von unten beginnend jeweils ein Kästchen bei der betreffenden Anzahl. Wiederholen Sie dieses Experiment so oft, bis Sie im Diagramm eine Verteilung gut erkennen können. Sie haben hier eine Bernoulli-Kette der Länge n = 5. Schätzen Sie aus den vielen Würfen der fünf Münzen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Anzahl auf „Zahl“ gefallener Münzen ab.



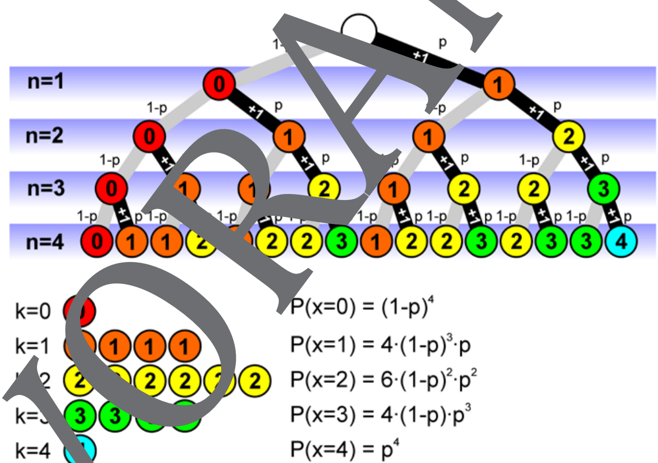
Grafik und Foto: Dr. Jürgen Franke

Jetzt führen drei Pfade zu Gewinnen. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Pfadregel zu $(1-p)^2$ für keinen Gewinn (k = 0). Einen Gewinn (k = 1) erhalten wir über die beiden Pfade mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)\cdot p$ und zwei Gewinne (k = 2) über den einen Pfad mit der Wahrscheinlichkeit p^2.

Wir würfeln zum dritten Mal:



Nun gibt es jeweils drei Pfade, die zu einem Gewinn (k = 1) und zu zwei Gewinnen (k = 2) führen. Für den vierten Wurf erhalten wir das folgende Baumdiagramm:



Grafiken: Dr. Jürgen Franke

Mit diesen Erkenntnissen können wir vorhersagen, welche Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Würfelexperiment mit fünf Runden bestehen:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\,p^0\,(1-p)^5=\left(\frac{5}{6}\right)^5\approx 0{,}40188$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}p^1\,(1-p)^4=5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}\approx 0{,}40188$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\,p^2\,(1-p)^3=10\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\approx 0{,}16075$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\,p^3\,(1-p)^2=10\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\approx 0{,}03215$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\,p^4\,(1-p)^1=5\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\approx 0{,}00322$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\,p^5\,(1-p)^0=\left(\frac{1}{6}\right)^5\approx 0{,}00013$$

Aufgaben

3. Sie haben in der ersten Aufgabe Experimente für eine Bernoulli-Kette aus fünf Münzwürfen ausgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das k-fache Auftreten von „Zahl". Berechnen Sie aus den Daten, welche Sie in Aufgabe 1 ermittelt haben, die relativen Häufigkeiten. Tragen Sie beide Werte zum Vergleich in eine Tabelle und in ein Diagramm ein.

Oft will man wissen, wie wahrscheinlich es ist, dass die Bernoulli-Kette maximal eine bestimmte Anzahl günstiger Ereignisse hat. Im Beispiel der fünf Münzwürfe wäre das z. B. die Frage: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als drei Münzen auf Zahl fallen?" Dazu muss man die Wahrscheinlichkeiten für X = 0, X = 1 und X = 2 addieren:

$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

4. Bestimmen Sie aus den Daten der Aufgabe 3 die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als drei Münzen auf „Zahl" fallen.