

# Paradoxa der Stochastik – unglaublich!

Florian Borges, Traunstein

Illustrationen von Florian Borges



© Klaus Vedfelt/DigitalVision/Getty Images Plus

Der Begriff *Paradoxon* leitet sich aus dem Griechischen ab: *para* bedeutet entgegen, *doxa* heißt Erwartung. Ein Paradoxon ist also ein Sachverhalt, der ein unerwartetes Ergebnis zeigt. Dabei besteht die (enttäuschte) Erwartung etwa aus Erfahrungen, Beobachtungen, Wissen oder bestimmten Vorüberlegungen. Die Auflösung eines jeden Paradoxons sorgt für einen persönlichen Lerneffekt sowie im Großen für die Weiterentwicklung der Wissenschaft. Die hier ausgeführten Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung eignen sich besonders als motivierende Denkanstöße für Oberstufenschülerinnen und -schüler und vertiefen deren stochastisches Grundwissen in voller Breite.

# Paradoxa der Stochastik – unglaublich!

Florian Borges, Traunstein

Illustrationen von Florian Borges

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1 Simpson-Paradoxon</b>	<b>2</b>
<b>M 2 Efrons nicht transitive Würfel</b>	<b>3</b>
<b>M 3 Bridge-Paradoxon</b>	<b>4</b>
<b>M 4 Geburtstags-Paradoxon</b>	<b>5</b>
<b>M 5 Paradoxon der zwei Umschläge</b>	<b>7</b>
<b>M 6 Ziegenparadoxon</b>	<b>8</b>
<b>M 7 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!</b>	<b>9</b>
<b>Lösungen</b>	<b>11</b>

© RAABE 2021

## Die Schüler lernen:

- wachsam und kritisch auf scheinbar widersprüchliche Ergebnisse zu reagieren, deren Verblüffungseffekt bei vielen Paradoxa den Forschergeist und Ehrgeiz wecken.
- Vorsicht wahren und lassen bei scheinbar selbstverständlicher Transitivität.
- den Erwartungs- oder Mittelwert als oft, aber nicht immer hilfreiches Mittel der Wahl zu sehen.
- „offensichtliche“ Gleichverteilung ggf. nochmal kritisch zu prüfen.
- Zusatzinformationen in Hinblick auf ihren Mehrwert einzustufen.
- Bezugsgrößen bei Bedarf im Auge zu behalten.

## Hinweise zu Beitragstitel

### Ablauf der Unterrichtseinheit

Beginnen Sie in Kleingruppen mit dem **Simpson-Paradoxon (M 1)** und wiederholen Sie an dieser Stelle Grundwissen über Laplace-Verteilungen. Nach dieser ersten Überraschung folgen die nicht transitiven **Würfel von Efron (M 2)** mit der Erkenntnis, dass der Erwartungswert nicht alle wesentlichen Informationen enthält – einige Aufgaben erhöhen den „Misst“. Zur Wiederholung der hypergeometrischen Verteilung und des Binomialkoeffizienten drängt sich das **Bridge-Paradoxon (M 3)** mit dem nächsten Spazioegang auf „logischem Glatteis“ auf. Eher aus Bekanntheitsgründen darf das **Geburtsparadoxon (M 4)** nicht fehlen, dessen Skepsisfaktor hauptsächlich in der geringen Erfahrung mit den rasch wachsenden Fakultäten liegt und keinen Denkfehler provoziert. Die Aufgabe wiederholt – ein wenig getarnt – die gesamte Situation eins zu eins als **Petersburger Paradoxon der beiden Umschläge (M 5)** klären die Jugendlichen hingegen einen Denkfehler auf. Das anspruchsvolle (aber mit dem Hinweis gut aufzulösende) **Ziegenproblem (M 6)** war einst sehr präsent in der Weltpresse – überraschend aber „Mehrwert“ einer späten Zusatzinformation. Im **Abschlusstest (M 7)** lernen zur Abrundung weitere Überraschungen, die an dieser Stelle aber die längst „misstrauischen“ Schülerinnen und Schüler nicht aus der Ruhe bringen werden.

### Lehrplanbezug

Die Schülerinnen und Schüler lernen

- einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff kennen und präzisieren so ihre Vorstellungen von bereits bekannten Begriffen und Vorgehensweisen,
- formal mit Ereignissen umzugehen,
- den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen,
- den Binomialkoeffizienten kennen und die Binomialverteilung vertraut anzuwenden,
- die Begriffe *Zufallsvariable*, *Erwartungswert*, *Bernoulli-Experiment* und *Standardabweichung* im Kontext souverän anzuwenden,
- mit einer einfachen Kalkulation zu arbeiten
- den einseitigen Signifikanztest kennen.

vgl. [https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/content/serv/3.1.neu/g8.de/id\\_26192.html](https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/content/serv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html) (aufgerufen am 10.07.2021)

## M 1      Simpsons Paradoxon

Eine pharmazeutische Firma testet zwei ihrer Schmerzmittel, Alpha und Beta: Beim Medikament Alpha stellen 180 der 240 getesteten Frauen eine Wirkung fest, bei Mittel Beta spüren 340 der 510 getesteten Frauen eine Schmerzlinderung. Beim Präparat Alpha bestätigen 240 der 720 getesteten Männer die Wirksamkeit, bei Mittel Beta sind es 40 von 160 Testmännern.

- Welches der beiden Mittel ist bei Frauen wirksamer?

$$\text{Alpha: } \frac{180}{240} = 75 \% \quad \text{Beta: } \frac{340}{510} \approx 66,7 \% \quad \text{Alpha ist besser für Frauen!}$$

- Welches der beiden Mittel ist bei Männern wirksamer?

$$\text{Alpha: } \frac{240}{720} \approx 33,3 \% \quad \text{Beta: } \frac{40}{160} = 25 \% \quad \text{Alpha ist besser für Männer!}$$

- Welches der beiden Mittel ist – unabhängig vom Geschlecht – wirksamer?

$$\text{Alpha: } \frac{420}{960} = 43,75 \% \quad \text{Beta: } \frac{380}{670} \approx 56,7 \% \quad \text{Beta ist besser für alle!}$$

**Was ist wirklich besser? – Erklärung für das scheinbar widersinnige Ergebnis:**

Die Einzelergebnisse gehen unterschiedlich gewichtet ins Gesamtergebnis ein.

### Aufgabe: Verlängerung auslaufen der Abos einer Zeitschrift

Interpretieren Sie die Tabelle aus Sicht des Abo-Vertreters / aus Sicht seiner Vorgesetzten:

Monat	Kategorie des laufenden Abonnements					Summe
	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	
Januar						
Ausl. Abos	5594	18 364	20 862	2986	149	45 955
Verläng.	27 700	14 488	4343	1783	13	23 545
Anteil	<b>0,812</b>	<b>0,789</b>	<b>0,208</b>	<b>0,597</b>	<b>0,087</b>	<b>0,512</b>
Februar						
Ausl. Abos	884	5140	864	2224	45	9157
Verläng.	704	3907	122	1134	2	5869
Anteil	<b>0,796</b>	<b>0,760</b>	<b>0,141</b>	<b>0,510</b>	<b>0,044</b>	<b>0,641</b>

 Hinweis: „Anteil“ ist das Verhältnis der verlängerten Abos und der auslaufenden.



## M 2 Efrons nicht transitive Würfel

Die Würfel

- **A** (mit den Zahlen 1, 1, 1, 5, 5, 5) und
- **C** (mit 3, 3, 3, 3, 3, 3)

liefern beide durchschnittlich den Würfelwert 3.

Der Würfel

**B** (0, 0, 4, 4, 4, 4) bringt durchschnittlich  $\frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$ ,

der Würfel

**D** (2, 2, 2, 2, 6, 6) dagegen sogar  $\frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$ .

Jedoch gewinnen im paarweisen Vergleich jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  Würfel

- A gegen B,
- B gegen C,
- C gegen D und
- schließlich auch D gegen A!



Warum kann man sich hier nicht auf den Erwartungswert verlassen?

### Aufgaben

1. Die Kinobesucher bei „Teleubb... der Film“ waren durchschnittlich ca. 40 Jahre alt – genauer: etwa 70-jährige Opas bzw. Opas mit je einem Enkelkind (etwa 10 Jahre alt).

Würde die Verwendung des Medians die Aussagekraft hier im Vergleich zum Mittelwert erhöhen?

2. Bei der Lotterie 1 gewinnen Sie mit 20 % Wahrscheinlichkeit 1 € und mit 80 % Wahrscheinlichkeit 0 €, also durchschnittlich 2,6 €.

Lotterie 2 zahlt mit 80 % Wahrscheinlichkeit 2 € aus und in 20 % der Fälle 4 €, durchschnittlich sind das 2,4 €.

Welche Lotterie ist „besser“? Versuchen Sie für jede der beiden Varianten eine positive Argumentation zu finden und hinterfragen Sie den Sinn des Erwartungswertes in diesem Beispiel.

# Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



- ✓ **Über 4.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- ✓ **Sichere Zahlung** per Rechnung, PayPal & Kreditkarte
- ✓ **Exklusive Vorteile für Grundwerks-Abonent\*innen**
  - 20% Rabatt auf Unterrichtsmaterial für Ihr bereits abonniertes Fach
  - 10% Rabatt auf weitere Grundwerke

Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**