Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Überblick und Aufgaben

von Alfred Müller

© Orbon Alija/Getty Images Plus/E+

Von der Binomial-Verteilung über die geometrische Verteilung bis hin zur Normal-Verteilung beschäftigen sich die Schüler in diesem Beitrag mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In abgestuften Aufgaben unterscheiden und berechnen sie verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

VORANSICHT

RAABE, KLASSE SCHULE

Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Überblick und Aufgaben

Sekundarstufe II

von Alfred Müller

© RAABE 2019

Kompetenzprofil

Inhalt: diverse Wahrscheinlichkeitsverteilungen: geometrische Verteilung, Pascal-Verteilung, Binomial-Verteilung Hypergeometrische Verteilung, Näherung der Binomialverteilung nach Moivre-Laplace, Poisson-Verteilung, Normal-Verteilung

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2)

VORANSICHT

Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Übersicht und Aufgaben

Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Überblick

Diskrete Verteilungen

Dichtefunktion f: $k \longmapsto P\,(Z = k)$

Kumulative Verteilungsfunktion: $P(Z \le k) = \sum_{i=0}^{k} f(i),\ k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \le n$

Es gilt stets: $\sum_{i=0}^{n} f(i) = 1$

Ein-Punkt-Verteilung:	$P(Z = z_0) = 1$
Zwei-Punkt-Verteilung (Bernoulli-Verteilung)	$P(Z = k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1 - p, & k = 0 \end{cases}$
Gleichverteilung	$P(Z = k) = \frac{1}{n}$
Geometrische Verteilung	$P(Z = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$
Hypergeometrische Verteilung	$P(Z = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Binomialverteilung	$P(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Pascal-Verteilung	$P(Z = k) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Multinomialverteilung	$P\left[(Z_1, Z_2, \ldots, Z_r) = (k_1, k_2, \ldots, k_r)\right] = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$
Poisson-Verteilung	$P(Z = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$

© RAABE 2019

VORANSICHT

Aufgaben

1. Ein Bernoulli-Experiment wird so lange unabhängig wiederholt, bis zum ersten Mal Erfolg eintritt. Z bezeichne die Anzahl der Versuche, bis zum ersten Mal Erfolg eingetreten ist. Ein Erfolg (Treffer) tritt mit der Wahrscheinlichkeit p ein, ein Nichttreffer mit der Wahrscheinlichkeit q = 1 – p auf.
   a) Zeigen Sie, dass $P(Z = k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}$ gilt.
   b) Begründen Sie, dass es sich bei P (Z = k) um eine diskrete Verteilung handelt, indem Sie $\sum_{k=1}^{\infty} P(Z=k)$ ausrechnen.
   Warum heißt diese Verteilung wohl „geometrische Verteilung“?

2. Ein Bernoulli-Experiment wird so lange unabhängig wiederholt, bis zum k-ten Mal Erfolg eintritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies im n-ten Versuch der Fall ist,

   ist $P_n(k) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.
   a) Warum unterscheidet sich diese Verteilung, die „Pascal-Verteilung P_n (k)“ von der Binomialverteilung $B_p^n(Z=k)$?
   b) In welchem Zusammenhang stehen die Pascalsche-Verteilung P_n (Z=k) und die Binomialverteilung $B_p^n(Z=k)$?
   Berechnen Sie dazu den Faktor r in: $P_n(Z=k) = r \cdot B_p^n(Z=k)$.

3. Eine Maschine produziert Kleinteile als Zubehör für einen Maßartikel.
   a) 15 % der Produktion ist Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 zufällig aus der laufenden Produktion herausgegriffenen Teilen höchstens 25 defekt sind?
   b) Die Teile werden von einem Kontrolleur überprüft, der in 99 % aller Fälle richtig entscheidet. Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der falschen Entscheidungen des Kontrolleurs bei 200 überprüften Teilen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Kontrolleur mehr als drei Fehlentscheidungen?
   c) Vor dem Kontrolleur liegen 20 einzeln verpackte Kleinteile, von denen drei defekt sind. Er kann die verpackten Teile nicht unterscheiden und nimmt mit einem Griff fünf Kleinteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens ein defektes darunter?

VORANSICHT

© RAABE 2019

Lösungen

1.

a) k-Versuche: (k – 1) Misserfolge: $(1-p)^{k-1}$; 1 Erfolg: p

$\Rightarrow P(Z = k) = (p-1)^{k-1} \cdot p$

$= p \cdot (1-p)^{k-1}$

$= p \cdot q^{k-1}$ mit $q = 1 - p$

b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Z=k) = p + p\cdot q + p\cdot q^2 + \cdots$$
$$= p\left(1 + q + q^2 + \cdots\right)$$
$$= p\cdot\frac{1}{1-q} = p\cdot\frac{1}{p} = 1$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung, da Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1.

$\Rightarrow$ Die Verteilung heißt „geometrische Verteilung“, weil bei der Berechnung der Summe der Wahrscheinlichkeiten die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe auftritt.

© RAABE 2019

2.

a) In der Binomialverteilung folgt unter den Versuchen der k-te Erfolg nach dem (k – 1)-ten Erfolg an irgendeiner beliebigen Stelle. In der Pascal-Verteilung tritt der k-te Erfolg im n-ten Versuch auf.

b)
$$B_p^n(Z=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

$$P_n(Z=k) = \binom{n-1}{k-1}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

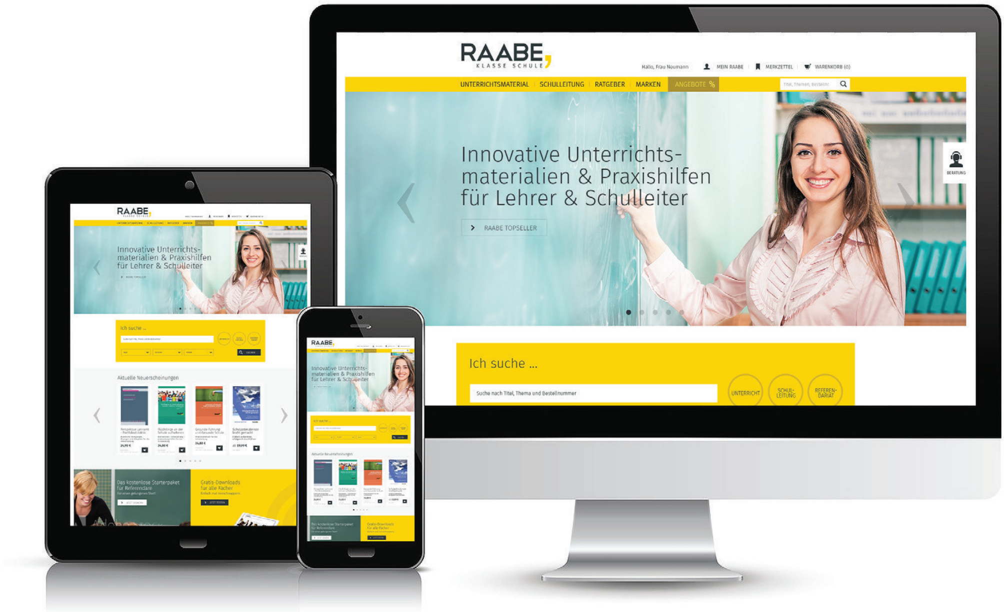
$$\Rightarrow P_n(Z=k) = \frac{k}{n}\cdot B_p^n(Z=k)$$

$$\Rightarrow r = \frac{k}{n}$$

VORANSICHT

RAABE,
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de