

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



Die Bedeutung von Hypothesentests in der statistischen
Entscheidungstheorie

Verbesserung der Schwarzfahrerquote

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlage GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 6290-0
Fax +49 711 62900-60
meinRaabe@klett.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Rösler MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Jo Mühlenfeld
Bildnachweis: Titelflyvector/iStock/Getty Images Plus/Italy
Lektorat: Mona Hitznauer

Die Bedeutung von Hypothesentests in der statistischen Entscheidungstheorie

Verbesserung der Schwarzfahrerquote – Alternativtest

Bei den Kölner Verkehrsbetrieben lag die Schwarzfahrerquote in den Jahren 2016 und 2017 konstant bei 2 %, was u. a. auf die Anhebung des erhöhten Beförderungsentgelts auf 60 € im Jahr 2015 zurückzuführen ist. Da durch die Schwarzfahrer ein jährlicher Schaden von etwa neun Millionen Euro entsteht, soll versucht werden, im laufenden Jahr z. B. durch die Erhöhung der zur Kontrolle eingesetzten Mitarbeiter die Quote um 0,5 Prozentpunkte zu senken, so wie es in den Jahren 2012 bis 2014 gelungen ist.

1. Durch eine Kontrolle von 10 000 Fahrgästen an einem Tag soll getestet werden, ob die Schwarzfahrerquote, die wie vor 2 % beträgt oder auf 1,5 % gesunken ist. Werden höchstens 175 Schwarzfahrer angetroffen, wird davon ausgegangen, dass die Quote auf 1,5 % gesunken ist. Dieses Verfahren kann natürlich zu Fehlentscheidungen führen.
 - 1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aufgrund der Stichprobe von einer Senkung der Quote ausgegangen wird, obwohl diese in Wirklichkeit unverändert ist.
 - 1.2 Stellen Sie den Sachverhalt mit dem GTR in einem Säulendiagramm dar.
 - 1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aufgrund der Stichprobe davon ausgegangen wird, dass die Quote unverändert 2 % beträgt, obwohl sie in Wirklichkeit auf 1,5 % gesunken ist.
 - 1.4 Stellen Sie den Sachverhalt mit dem GTR in einem Säulendiagramm dar.
2. Die Kölner Verkehrsbetriebe möchten werbewirksam eine Verringerung der Schwarzfahrerquote auf 1,5 % verkünden. Wegen der Zufälligkeit des Stichprobenergebnisses muss das Risiko für eine Fehlentscheidung möglichst klein sein.
 - 2.1 Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel, wie viele Schwarzfahrer höchstens angetroffen werden dürfen, um daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1 % zu schließen, dass die Quote auf 1,5 % gesunken ist.
 - 2.2 Stellen Sie den Sachverhalt mit dem GTR in einem Säulendiagramm dar.

Fachsprachliche Grundbegriffe beim Testen von Hypothesen

Ordnen Sie den Situationen aus dem Alternativtest von Seite 1 die fachsprachlichen Grundbegriffe zu.

Fahrgäste bei den KVB im Jahr 2018	
$H_0 : p = 0,02$	
$H_1 : p = 0,015$	
Auswahl von 10 000 Fahrgästen aus allen Fahrgästen der KVB	
Anzahl der Schwarzfahrer	
$K = 175$	
$X \leq 175$: Entscheidung für H_1 $X > 175$: Entscheidung für H_0	
$\{0, 1, 2, \dots, 174, 175\}$	
$\{176, 177, \dots, 10000\}$	
Die Entscheidung fällt für H_1 , obwohl H_0 wahr ist.	
Die Entscheidung fällt für H_0 , obwohl H_1 wahr ist.	
$P(X \leq 175), n = 10000, p = 0,02$	
$P(X > 175), n = 10000, p = 0,015$	

Hinweis: Sie können die folgende Wortliste verwenden:

Statistische Unabhängigkeit – Fehler 1. Art – Kritische Zahl K – Alternativhypothese H_1 – Annahmebereich – Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art – Prüfgröße – Stichprobe – Fehler 2. Art – Nullhypothese H_0 – Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art – Verwerfungsbereich – Entscheidungsregel

Die Bedeutung der Entscheidungsregel für die Irrtumswahrscheinlichkeiten

1. Nachdem der erste Hypothesentest die Einschätzung nahelegte, dass die Schwarzfahrerquote auf 1,5 % gesunken ist, soll diese nun durch einen zweiten Test gestützt werden, bei dem die Stichprobe aus 50.000 Fahrgäste erhöht wird. Werden höchstens 940 Schwarzfahrer angegriffen, wird davon ausgegangen, dass die Quote auf 1,5 % gesunken ist.
 - 1.1 Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. Art und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.
 - 1.2.1 Stellen Sie eine Entscheidungsregel auf, die die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art nunmehr höchstens 1 % beträgt.
 - 1.2.2 Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.
2. Acht Wochen vor der nächsten Landtagswahl liegt die Partei „grüne Alternative“ mit 21 % drei Prozentpunkte hinter der Partei „sozialliberal“. Das Wahlkampfteam verstärkt die Aktivitäten und möchte in einer repräsentativen Blitzumfrage unter 1000 Wahlberechtigten kurz vor der Wahl herausfinden, ob sich die Anstrengungen gelohnt haben.
 - 2.1 Stellen Sie eine Entscheidungsregel auf, die es dem Wahlkampfteam ermöglicht, mit einer sehr geringen Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% die Aktivitäten im obigen Sinne als erfolgreich anzusehen und zu behaupten, den Rückstand aufgeholt zu haben.
 - 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Wahlkampfteam die Köpfe klingen lässt, weil der Wahlkampf nicht als Erfolg angesehen wird, obwohl sich der Stimmenanteil um drei Prozentpunkte erhöht hat.
3. Ein Hersteller verwendet Sensoren, die basierend auf jahrelangen Erfahrungen mit einer Zuverlässigkeit von 98,65 % arbeiten. Ihm werden nun Sensoren angeboten, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 % ausfallen. Entwickeln Sie einen Alternativtest, der einen Anbieterwechsel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % erlaubt.

Schätzen einer unbekanntem Wahrscheinlichkeit

1. Die Kölner Verkehrsbetriebe begründen ihre für 2017 ermittelte Schwarzfahrerquote von 2 % mit der Tatsache, dass von den 278 Millionen Fahrgästen 3,7 Millionen kontrolliert wurden und 75 000 von diesen keine Fahrschein besaßen.
 - 1.1 Beurteilen Sie dieses Verfahren.
 - 1.2 Bestimmen Sie alle Anteile p in der Gesamtheit, in deren 95 %-Umgebung das Stichprobenergebnis liegt.
 - 1.3 Ermitteln Sie den notwendigen Umfang n der Stichprobe, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % die Schwarzfahrerquote von 2 % auf einen Prozentpunkt genau zu bestimmen.
2. Bei einer Befragung von 1 500 zufällig (praxeologisch) ausgesuchten Personen einer Großstadt gaben 777 Befragte an, bei der bevorstehenden direkten Wahl des Oberbürgermeisters den bisherigen Amtsinhaber wählen zu wollen.
 - 2.1 Untersuchen Sie, ob der Kandidat auf die absolute Mehrheit der Stimmen hoffen kann, indem Sie algebraisch alle Anteile p an der statistischen Gesamtheit ermitteln, in deren 95 %-Umgebung das Stichprobenergebnis liegt.
 - 2.2 Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch oder mit einer Tabellenkalkulation.
 - 2.3 Interpretieren Sie das Ergebnis.
3. „Vorsorge wird genutzt“ – eine Studie der pronova BKK machte deutlich, dass 50 % der Männer alle der empfohlenen Vorsorgeuntersuchungen wahrnehmen. Erläutern Sie, wie eine solche Studie konkret aussehen könnte und welche Stichprobenergebnisse im Nachhinein die o.g. Schlussfolgerung zulassen.
4. Durch eine Meinungsumfrage vor einer Wahl soll der Anteil der Wähler einer Partei auf einen Prozentpunkt genau bestimmt werden. Untersuchen Sie, welcher Stichprobenumfang für die Befragung notwendig ist.

Der Signifikanztest im Überblick

Über die auf Seite 2 thematisierten fachsprachlichen Grundbegriffe hinaus gibt es beim Signifikanztest weitere Begriffe, die Sie ebenso wie grundlegende Aussagen und erläuternde Grafiken im Folgenden erklären sollen.

1. Erläutern Sie die folgenden fachsprachlichen Grundbegriffe mit Hilfe der Beispiele von Seite 5:
 - 1.1 Rechtsseitiger Signifikanztest
 - 1.2 Linksseitiger Signifikanztest
 - 1.3 Zweiseitiger Signifikanztest
 - 1.4 Signifikanzniveau α
 - 1.5 β -Fehler
2. Begründen Sie die folgenden Aussagen auch durch ein Beispiel.
 - 2.1 Die Forschungshypothese wird als Gegenhypothese H_1 zur Nullhypothese H_0 formuliert.
 - 2.2 Für den rechtsseitigen Test gilt:
Je größer p ist, desto kleiner ist der β -Fehler.
 - 2.3 Für den linksseitigen Test gilt:
Je kleiner p ist, desto kleiner ist der β -Fehler.
3. Erläutern Sie die folgenden Grafiken:
 $n = 20; H_0 : p = 0,5$

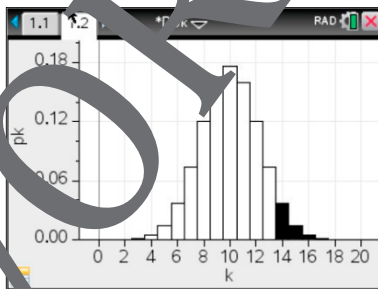


Abb. 1

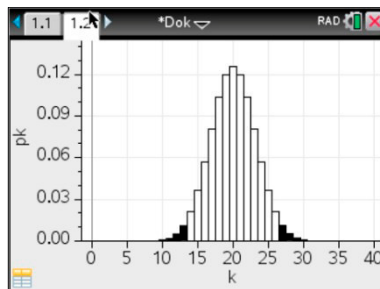
 $n = 40; H_0 : p = 0,5$


Abb. 2

Lernerfolgskontrolle

1. Interpretieren Sie die grafische Darstellung in einem selbst gewählten Kontext.

$n = 60$

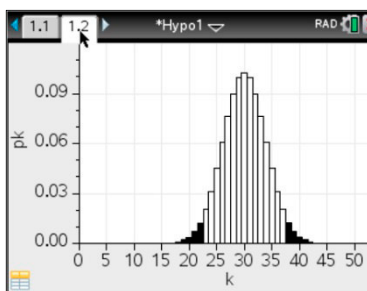


Abb. 3

$n = 20$



Abb. 4

2. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.
- 2.1 Die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art und den Fehler 2. Art ergeben zusammen den Wert Eins.
 - 2.2 Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art hängt von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgröße X und der Wahl der kritischen Zahl K ab.
 - 2.3 Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art lässt sich nur beim Alternativtest eindeutig bestimmen.
 - 2.4 Bei einem Alternativtest erhöht sich bei gleicher Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn bei gleichem Stichprobenumfang die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art verringert wird.
3. Laut Statistischem Bundesamt betrug im Jahr 2018 der Anteil der Haushalte mit Flachbildfernsehern 85,1 %. Es soll ein Signifikanztest durchgeführt werden, der die Behauptung „Der Anteil der Haushalte mit Flachbildfernsehern ist gestiegen“ untersucht. Beschreiben Sie ausführlich die Planung und Durchführung des Tests.

Kompetenzprofil

- Niveau: vertiefend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: argumentieren, bewerten
- Problemlösen: Lösungsstrategien entwickeln, vernetztes Denken
- Modellierung: Modelle entwickeln
- Medien: GTR (z. B. TI-Nspire CX) oder alternative digitale Mathematikwerkzeuge, wie CAS und GeoGebra
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Binomialverteilung, Alternativtest, Signifikanztest, Fehler 1. und 2. Art

Autor: Udo Mühlenfeld

Lösung

Verbesserung der Schwarzfahrerquote

1.1 X gibt die Anzahl der Schwarzfahrer an. Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass trotz einer Quote von 2 % höchstens 175 Schwarzfahrer angetroffen werden. X ist binomialverteilt mit $n = 10\,000$ und $p = 0,02$.

$$P(X \leq 175) = \sum_{k=0}^{175} \binom{10\,000}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{10\,000-k}$$

Für die Berechnung mit dem GTR TI-Nspire CX wird der Befehl `binomCdf(n,p,k)` verwendet (s. Abbildung). Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = 10\,000$ einer Senkung der Quote ausgegangen wird ($X \leq 175$), obwohl diese in Wirklichkeit unverändert ist ($p = 0,02$) beträgt 3,8 %.



Abb.

- 1.2 Für das Säulendiagramm wird ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall ausgewählt: $E(X) = n \cdot p = 10000 \cdot 0,02 = 200$
Für die Erstellung des Säulendiagramms wird die Tabellenkalkulation verwendet. Mit dem Befehl `seq(i,i,150,250)` wird in der ersten Spalte („k“) eine Zahlenfolge von 150 bis 250 einschließlich erzeugt. Mit dem Befehl `binompdf(10000,0.02,k)` werden in der zweiten Spalte („pk“) die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnet.

A k	B pk	C	D
=seq(i,i,150,250)	=binompdf(10000,0.02,k)		
1	150	0.000031	
2	151	0.000041	
3	152	0.000054	
4	153	0.000071	
5	154	0.000093	

Abb. 6

A k	B pk	C	D
=seq(i,i,150,250)	=binompdf(10000,0.02,k)		
1	150	0.000031	
2	151	0.000041	
3	152	0.000054	
4	153	0.000071	
5	154	0.000093	

Abb. 7

Die Einstellungen für das Ergebnisdiagramm werden mit b 38 vorgenommen. Für die Einstellungen der Säulen wählen Sie b 2 2 2 1. Die Fenstereinstellungen nehmen Sie mit 1 5 1 vor. Wenn Sie die zu $X \leq 175$ gehörigen Säulen anklicken, ändern diese ihre Farbe.

Abb. 8

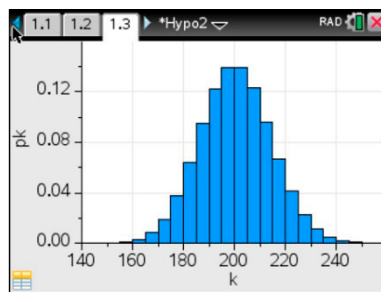


Abb. 9

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de