

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Statistik Sek I/II



CD-Durcheinander

Aufgaben zur Binomialverteilung

VORANSICHT

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-20
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Rösler MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: colourbox.de
Lektorat: Mona Hitznauer

CD-Durcheinander

Die Sternwarte zieht um. In einem Karton befinden sich 200 CDs, darunter 40 Stück mit Mondmotiven. Beim Abstellen auf einen Tisch reißt der Karton und alle CDs fallen kreuz und quer durcheinander auf den Fußboden.

1. Da die nicht beschrifteten CDs nur durch Anschauen zu identifizieren sind, werden die CDs wie folgt aufgelesen:
Hat man eine Mond-CD gefunden, so wird diese aussortiert.
Ist die betrachtete CD keine Mond-CD, dann wird sie wieder (planlos) auf den Haufen geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man eine Mond-CD
 - 1.1 im dritten Versuch,
 - 1.2 nur im dritten Versuch,
 - 1.3 frühestens im dritten Versuch,
 - 1.4 spätestens im dritten Versuch?
2. Der Auflesemodus von Aufgabe 1 ist natürlich nicht sehr sinnvoll und wird wie folgt geändert:
Ist eine CD keine Mond-CD, so wird sie beiseitegelegt.
Berechnen Sie jetzt unter dieser Voraussetzung nochmals die Ergebnisse der Aufgaben 1.1–1.4.
3. Jetzt soll angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Mond-CD aufzufinden immer konstant $p = 0,2$ beträgt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei 20 Versuchen
 - 3.1 genau fünf Mond-CDs,
 - 3.2 die fünfte Mond-CD im 20. Versuch,
 - 3.3 keine Mond-CD unter den ersten zehn Versuchen,
 - 3.4 mehr Mond-CDs als erwartet?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: Argumentieren
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Ereigniswahrscheinlichkeiten, Ziehen mit und ohne Zurücklegen, bedingte Wahrscheinlichkeit, Binomialverteilung

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. Es handelt sich um ein Ziehen mit Zurücklegen mit:
 $p = P(\text{Mond-CD}) = 0,2$.
Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 - 1.1 $P(E_1) = 0,2$,
weil für eine Mond-CD an jeder Stelle $p = 0,2$ gilt.
 - 1.2 $P(E_2) = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128 = 12,8\%$,
weil der einen Mond-CD zwei nicht Mond-CDs vorhergehen.
 - 1.3 $P(E_3) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024 = 10,24\%$,
weil es vorher ist, dass zwei nicht Mond-CDs aufgetreten sind.
 - 1.4 $P(E_4) = 1 - 0,8^3 = 0,488 = 48,8\%$,
was nicht sein darf, dass drei nicht Mond-CDs CD auftreten
(Gegenwahrscheinlichkeit).

2. Es handelt sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen mit $N = 200$ und $K = 40$.
Es sei $M =$ „Mond-CD wurde gezogen“. Gesucht sind die folgenden
Wahrscheinlichkeiten:

- 2.1 $P(E_1^*) = 0,2$, weil gilt:

$$\begin{aligned} & P(\bar{M}\bar{M}M) + P(\bar{M}MM) + P(M\bar{M}M) + P(MMM) \\ &= \frac{160 \cdot 159 \cdot 40 + 160 \cdot 40 \cdot 39 + 40 \cdot 160 \cdot 39 + 40 \cdot 39 \cdot 38}{200 \cdot 199 \cdot 198} = 0,2 \end{aligned}$$

- 2.2 $P(E_2^*) = \frac{160}{200} \cdot \frac{159}{199} \cdot \frac{40}{198} \approx 12,91\%$

- 2.3 $P(E_3^*) = \frac{160}{200} \cdot \frac{159}{199} \approx 63,92\%$

- 2.4 $P(E_4^*) = 1 - \left(\frac{160}{200} \cdot \frac{159}{199} \cdot \frac{158}{198} \right) \approx 48,91\%$

3. Es liegt jeweils eine Binomialverteilung mit $p = 0,2$ vor. Gesucht sind
folgende Wahrscheinlichkeiten:

- 3.1 $B_{0,2}^{20}(Z = 5) = \binom{20}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx 0,1746 = 17,46\%$

- 3.2 Die ersten vier der fünf Mond-CDs sind auf 19 Plätze zu verteilen.
Dadurch ist $n=19$:

$$B_{0,2}^{19}(Z = 4) = \binom{19}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{15} \approx 0,0436 = 4,36\%$$

- 3.3 $B_{0,2}^{10}(Z = 0) = 0,8^{10} \approx 0,1074 = 10,74\%$

- 3.4 Es werden 20 $\cdot 0,2 = 4$ Mond-CDs erwartet.

$$B_{0,2}^{20}(Z > 4) = 1 - B_{0,2}^{20}(Z \leq 4) \approx 1 - 0,62965 = 0,37035 \approx 37,04\%$$

(Wert der kumulierten Wahrscheinlichkeit siehe Tafelwerk).