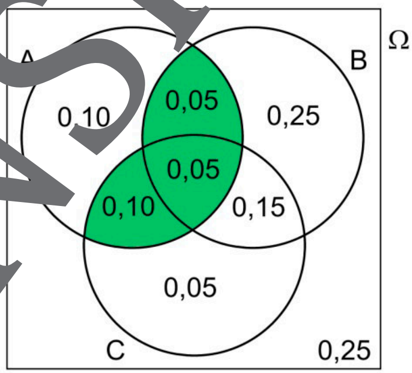
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



Viele Ereignisse

Ereigniswahrscheinlichkeiten und Mengendiagramme

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Mona Hitzenauer
Bildnachweis Titel: Mona Hitzenauer
Lektorat: Mona Hitzenauer

Viele Ereignisse

1. Bei der medizinischen Untersuchung von Fleischessern und Vegetariern wird der Gesundheitszustand verglichen. Dabei werden die Personen, die an der Untersuchung teilnehmen, in Männer (Ereignis M) und Frauen sowie in Fleischesser (Ereignis F) und Vegetarier eingeteilt.

1.1 Welche Personen werden durch die folgenden Ereignisse beschrieben?

(1) $\overline{M}$

(2) $M \cap F$

(3) $F \setminus M$

(4) $\overline{M \cup F}$

(5) $\left(M \cup \overline{F}\right) \cap (\overline{M} \cup F)$

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse unter 1.1, wenn $P(M) = 0{,}6;\ P(F) = 0{,}7$ und $P(M \cup F) = 0{,}8$ gilt.

2. Die Wahrscheinlichkeit für einen Verkehrsstau in der Saalfelder Straße (Ereignis S) beträgt 15 %, die am Kreisel (Ereignis K) 10 %. Die Wahrscheinlichkeit, an beiden Orten im Stau zu stehen, beträgt nur 1 %. Ein Verkehrsteilnehmer, der beide Orte befährt, wird zufällig herausgegriffen.

2.1 Formulieren Sie die Ereignisse $E_1 = S \cup K$ und $E_2 = \overline{S} \cap K$ in Worten.

2.2 Berechnen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $P\left(\overline{S} \cap \overline{K}\right)$

(2) $P\left[\left(S \cap \overline{K}\right) \cup \left(\overline{S} \cap K\right)\right]$

(3) $P_{\overline{S}}(K)$

(4) $P_{\overline{K}}(S)$

3. Smartphones werden auf technische Mängel und auf Gehäusefehler untersucht. Aus Erfahrung weiß man, dass 1 % aller Smartphones sowohl technische Mängel, als auch einen Gehäusefehler besitzen, während 97 % aller Geräte technisch einwandfrei sind und 95 % aller Smartphones keinen Gehäusefehler aufweisen. Für ein zufällig entnommenes Smartphone werden folgende Ereignisse definiert:
A: „Smartphone technisch einwandfrei" und
B: „Gehäuse des Smartphones ist einwandfrei".
Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P(A \cap B)$
(2) $P(A \cup B)$
(3) $P(A \cap \overline{B})$
(4) $P_B(\overline{A})$
(5) $P_{\overline{A}}(B)$
(6) $P_{A \cup B}(A \cap B)$

4. Von den 90 Schülern der 6. Jahrgangsstufe haben 18 Schüler einen Wahlunterricht in einem musischen Fach (Ereignis M) und 60 Schüler einen in einem naturwissenschaftlichen Fach (Ereignis N) belegt. 15 Schüler haben Wahlkurse aus beiden Gebieten belegt. Ein Schüler der 6. Jahrgangsstufe wird zufällig ausgewählt.

4.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel, beschreiben Sie die folgenden Ereignisse in Worten und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:
(1) $\overline{M}$
(2) $M \cup N$
(3) $(M \cap \overline{N}) \cup (\overline{M} \cap N)$

4.2 Ein Schüler hat einen Wahlunterricht aus dem Gebiet N belegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er auch einen Kurs aus M belegt?

4.3 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse M und N stochastisch unabhängig sind.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: argumentieren
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Ereigniswahrscheinlichkeiten und Mengendiagramm bei zwei und drei Ereignissen

Autor: Alfred Müller

Lösung

1.1 (1) $\overline{M}$: Person ist weiblich

(2) $M \cap F$: Person ist männlich und Fleischesser

(3) $F \setminus M$: Person ist weiblicher Fleischesser

(4) $\left(\overline{M \cup F}\right) = \overline{M} \cap \overline{F}$: Person ist weiblich und Vegetarier

(5) $$\left(M \cup \overline{F}\right) \cap \left(\overline{M} \cup F\right) = \left[M \cap \left(\overline{M} \cup F\right)\right] \cup \left[\overline{F} \cap \left(\overline{M} \cup F\right)\right]$$
$$= \left(M \cap \overline{M}\right) \cup \left(M \cap F\right) \cup \left(\overline{F} \cap \overline{M}\right) \cup \left(F \cap \overline{F}\right)$$
$$= \left(M \cap F\right) \cup \left(\overline{F} \cap \overline{M}\right)$$

Person ist männlicher Fleischesser oder weiblicher Vegetarier

1.2 Aus $P(M) = 0,60$, $P(F) = 0,70$ und $P(M \cup F) = 0,80$ ergibt sich mit $P\left(M \cap \overline{F}\right) = P(M \cup F) - P(F) = 0,80 - 0,70 = 0,10$ die folgende Vierfeldertafel, in der die gegebenen Werte unterstrichen sind:

	F	$\overline{F}$	
M	0,50	$\underline{0,10}$	$\underline{0,60}$
$\overline{M}$	0,20	0,20	0,40
	$\underline{0,70}$	0,30	1

Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $P(\bar{M}) = 0{,}40$

(2) $P(M \cap F) = 0{,}50$

(3) $P(F \setminus M) = P(F \cap \bar{M}) = 0{,}20$

(4) $P(\overline{M \cup F}) = 1 - P(M \cup F) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$

(5) $$\begin{aligned} P\left[(M \cup \bar{F}) \cap (\bar{M} \cup F)\right] &= P\left[M \cap (\bar{M} \cup F) \cup \bar{F} \cap (\bar{M} \cup F)\right] \\ &= P\left[(M \cap F) \cup (\bar{M} \cap \bar{F})\right] \\ &= 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7 \end{aligned}$$

2.1 $E_1 = S \cup K$:

Der Verkehrsteilnehmer steht im St[illegible] der S[illegible]lfelder Straße oder am Knorr-Kreisel.

$E_2 = \bar{S} \cap K$:

Der Verkehrsteilnehmer [illegible] im St[illegible] am Knorr-Kreisel (und nicht an der Saalfelder Straße)

2.2 Mit $P(S) = 0{,}15$, $P(K) = 0{,}10$ un[illegible] $P(S \cap K) = 0{,}01$ ergibt sich die folgende Vierfelderta[illegible] [illegible]r die ge[illegible]benen Werte unterstrichen sind.

	K	$\bar{K}$	
S	[illegible]	0,14	<u>0,15</u>
$\bar{S}$	0,09	0,76	0,85
	[illegible]	0,90	1

[illegible]arau[illegible]geben si[illegible] die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $P(\bar{S} \cap \bar{K}) = 0{,}76$

(2) $P\left[(S \cap \bar{K}) \cup (\bar{S} \cap K)\right] = 0{,}14 + 0{,}09 = 0{,}23$

(3) $P_{\overline{S}}(K) = \dfrac{P(\overline{S} \cap K)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,09}{0,85} = \dfrac{9}{85} \approx 0,1059 = 10,59\,\%$

(4) $P_{\overline{K}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{K} \cap S\right)}{P\left(\overline{K}\right)} = \dfrac{0,14}{0,90} = \dfrac{7}{45} \approx 0,1556 = 15,56\,\%$

3. Für die Ereignisse A und B kennt man folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,1;\quad P(A) = 0,97;\quad P(B) = 0,95$

Damit erhält man die folgende Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	0,93	0,04	0,97
$\overline{A}$	0,02	0,01	0,03
	0,95	0,05	1

Aus der Vierfeldertafel erhält man die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $P\left(A \cap B\right) = 0,93$

(2) $P\left(A \cup B\right) = 0,93 + 0,02 + 0,04 = 0,99$

(3) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,04$

(4) $P_B\left(\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = \dfrac{0,02}{0,95} = \dfrac{2}{95} \approx 0,0219 = 2,19\,\%$

(5) $P_{\overline{A}}\left(B\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{0,02}{0,03} = \dfrac{2}{3} \approx 66,67\,\%$

(6) $P_{A \cup B}\left(A \cap B\right) = \dfrac{P\left[\left(A \cup B\right) \cap \left(A \cap B\right)\right]}{P\left(A \cup B\right)} = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A \cup B\right)} = \dfrac{0,93}{0,99}$

$= \dfrac{93}{99} \approx 0,9394 = 93,94\,\%$

7.1 Mit dem Ereignis T: „Treffer“ erhält man das folgende Diagramm:

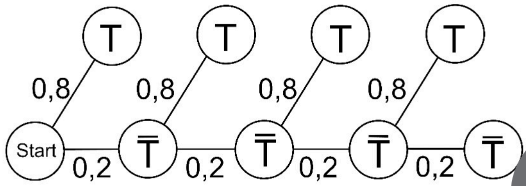


Abb. 2

Es gilt: P (Ziel getroffen) $= 1 - P\left(4 \text{ mal } \overline{T}\right) = 1 - 0,2^4 = 0,9984 = 99,84\,\%$

7.2 $P(Z=1) = 0,8$

$P(Z=2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$

$P(Z=3) = 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,032$

$P(Z=4) = 0,2^4 + 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,2^3 \cdot (0,2 + 0,8) = 0,2^3 = 0,008$

Tabellarisch:

z	1	2	3	4
P(Z = z)	0,8	0,16	0,032	0,008

Histogramm:

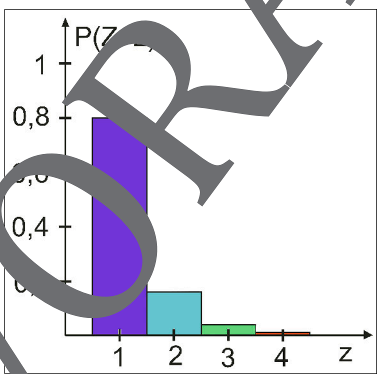


Abb. 3

Mengenbild:

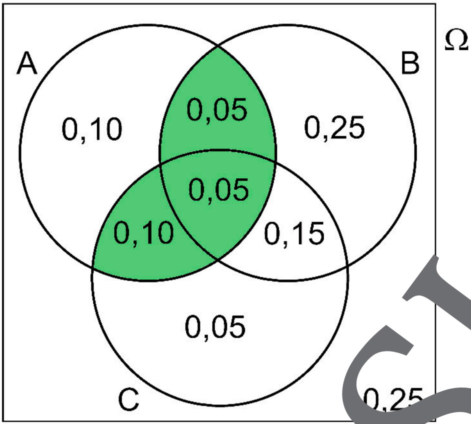


Abb. 7

(2) $P\left[A \cup (B \cap C)\right]$

$= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= 0{,}30 + 0{,}20 - 0{,}05 = 0{,}45$

Mengenbild:

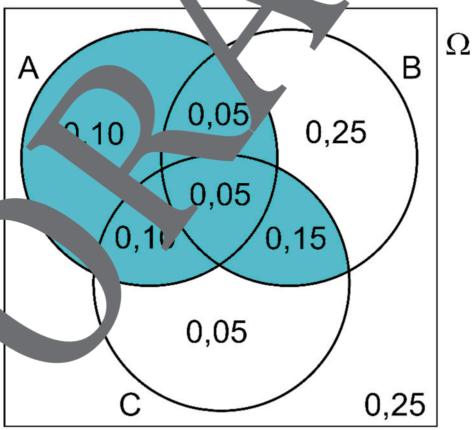


Abb. 8