

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



Qualitätssicherung
Testen von Hypothesen

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-20
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Rösler MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Wolfgang Zettlmeier
Bildnachweis Titel: Django/Getty Images Plus/E+/Spain
Lektorat: Doreen Hempel

Qualitätssicherung

- 1 Ein Elektrochip in Massenproduktion ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft.
 - 1.1 Begründen Sie, dass die zufällige Entnahme von Chips aus der laufenden Produktion als ein Bernoulli-Experiment aufgefasst werden kann.
 - 1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter
 - 1.2.1 sechs entnommenen Chips höchstens einer fehlerhaft ist;
 - 1.2.2 100 entnommenen Chips genau 20 fehlerhaft sind;
 - 1.2.3 200 entnommenen Chips mindestens 42 fehlerhaft sind.
 - 1.3 Wie viele Chips muss man der laufenden Produktion mindestens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einen fehlerhaften zu erhalten?
 - 1.4 Ein fehlerhafter Chip wird mit einem Prüfgerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % als fehlerhaft erkannt. Fehler werden auch einwandfreie Chips fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % als fehlerhaft deklariert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,
 - 1.4.1 mit der dieses Prüfgerät eine richtige Entscheidung trifft;
 - 1.4.2 dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist, wenn das Prüfgerät einen Fehler anzeigt.
 - 1.5 Das Prüfverfahren wird wie folgt verändert: Zehn Chips werden in Reihe geschaltet und in einem Durchgang geprüft. Nur wenn bei dieser Gruppenuntersuchung ein Fehler angezeigt wird, wird jeder Chip einzeln überprüft.
 - 1.5.1 Ermitteln Sie, wie viele Prüfungen im Durchschnitt für die Überprüfung erforderlich sind sowie die relative Einsparung und beurteilen Sie das Ergebnis.
 - 1.5.2 Bestimmen Sie für eine Gruppenuntersuchung mit n Chips ($n > 1$) allgemein die erwartete Anzahl von Prüfungen und optimieren Sie die relative Einsparung.
 - 1.6 Um den Herstellungsprozess zu verbessern, wird für eine Qualitätssteigerung eine Prämie ausgelobt, die ausgezahlt wird, wenn in einer

- Stichprobe von 100 Chips höchstens 10 fehlerhafte gefunden werden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Prämie
- 1.6.1 gezahlt, obwohl keine Verbesserung eingetreten ist;
 - 1.6.2 nicht gezahlt, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 5 % gestiegen ist?
- 1.7 Nachdem die Chips sorgfältig überprüft sind, werden sie von einer Logistikfirma versandt. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip beim Versand beschädigt wird, 1 %. Falls eine Lieferung mit 200 Chips mehr als fünf durch den Versand beschädigte Chips erhält, muss die Logistikfirma eine Entschädigung von 100 € bezahlen.
- 1.7.1 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für den Beschädigungsfall für eine Lieferung?
 - 1.7.2 Wie würde sich der Wert aus 1.7.1 verändern, wenn man erst ab sieben beschädigten Chips zahlen müsste, und welcher Entschädigungsbetrag müsste die Logistikfirma in ihre Kalkulation bei 1200 Lieferungen pro Jahr einbeziehen?
- 2 Die Qualitätssicherung bei der Herstellung von Handy-Akkus ist wesentlich höher als bei den Elektrochips. So beträgt der Ausschussanteil lediglich 2 %, wobei die einzelnen Ausschussakkus unabhängig voneinander auftreten.
- 2.1 Akkus werden für den Versand an Händler in Kartons zu je 100 Stück verpackt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der defekten Akkus nicht höher als die erwartete Anzahl?
 - 2.2 Die Herstellungskosten pro Akku einschließlich aller Nebenkosten betragen 2 €. Für den Umtausch eines defekten Akkus müssen 5 € eingerechnet werden. Aus Konkurrenzgründen ist der Abgabepreis für Akkus an Händler bei 1,36 € eingefroren. Kann die Firma unter diesen Umständen überhaupt wirtschaftlich arbeiten?
- 2 Stefan kauft beim Einzelhändler sechs Akkus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
- 2.3.1 genau zwei,
 - 2.3.2 keiner,
 - 2.3.3 höchstens einer Ausschuss?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: argumentieren
- Problemlösen: Lösungen berechnen
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Ereigniswahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung, Hypothesentest

Autor: Alfred Müller, Coburg

Lösung

- 1.1 Bei der Herstellung der Chips werden nur die beiden Ergebnisse „fehlerhaft“ oder „fehlerfrei“ unterschieden, sodass das Experiment als ein Bernoulli-Experiment angesehen werden kann. Ferner kann wegen der Massenproduktion (d.h. ohne Zurücklegen) und der Unabhängigkeit der fehlerhaften Teile voneinander von einer binomialverteilten Zufallsgröße ausgegangen werden.
- 1.2 Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der fehlerhaften Chips an. Z ist binomialverteilt mit $p = 0,2$. Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten, die mithilfe der (kumulativen) Tabelle der Binomialverteilung bestimmt werden.
- 1.2.1 $B_{0,2}^6(Z \leq 1) = 0,65536 = 65,54 \%$
- 1.2.2 $B_{0,2}^{100}(Z = 20) = 0,09930 = 9,93 \%$
- 1.2.3 $B_{0,2}^{200}(Z \geq 42) = 1 - B_{0,2}^{200}(Z \leq 41) = 1 - 0,61083 = 0,38917 = 38,92 \%$

1.3 Es gilt stets: $P(\text{mindestens ein...}) = 1 - P(\text{kein ...})$

$$1 - 0,8^n > 0,99$$

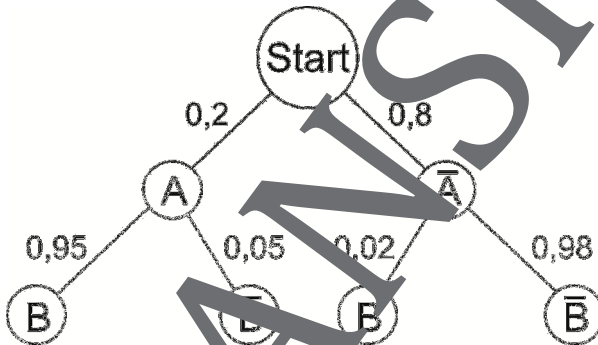
$$0,8^n < 0,01$$

$$n \cdot \ln 0,8 < \ln 0,01 \quad | : \ln 0,8 \quad (\ln 0,8 < 0)$$

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} = 20,64 \Rightarrow n \geq 21$$

Man muss mindestens 21 Chips entnehmen.

1.4 Mit den Ereignissen A „Chip defekt“ und B „Gerät zeigt Defekt an“ erhält man das folgende Baumdiagramm:



1.4.1 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{richtige Entscheidung}) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(\bar{B})$$

$$= 0,2 \cdot 0,95 + 0,8 \cdot 0,98 = 0,974 = 97,4 \%$$

1.4.2 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,95}{0,2 \cdot 0,95 + 0,8 \cdot 0,02} = 0,92233 = 92,23 \%$$

1.5.1 Man benötigt entweder eine Untersuchung (wenn alle Chips in Ordnung sind) mit der Wahrscheinlichkeit $0,8^{10}$ oder elf Prüfungen (zur Gruppenprüfung kommen noch zehn Einzelprüfungen) mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 0,8^{10}$. Man benötigt im Mittel folglich

$$= 1 \cdot 0,8^{10} + 11 \cdot (1 - 0,8^{10}) = 11 - 10 \cdot 0,8^{10} = 11 - 1,074 = 9,926$$

Im Mittel sind 9,926 Prüfungen erforderlich, d.h., die relative Einsparung beträgt nur

$$p_{10} = \frac{10 - 9,926}{10} = 0,74 \%$$

⇒ Mit dieser Methode kann kaum etwas eingespart werden.

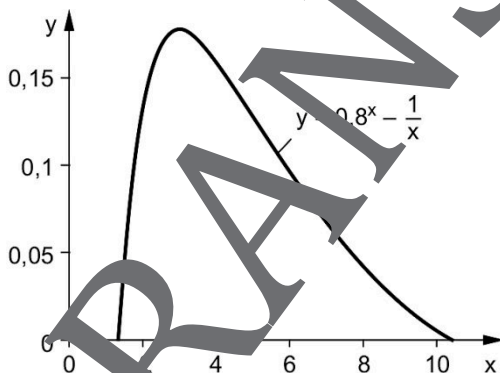
1.5.2 Für beliebige n ($n > 1$) gilt:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1 \cdot 0,8^n + (n+1) \cdot (1 - 0,8^n) \\ &= 0,8^n + n + 1 - n \cdot 0,8^n - 0,8^n = n + 1 - n \cdot 0,8^n\end{aligned}$$

Die relative Einsparung beträgt jetzt:

$$p_n = \frac{n - \bar{x}}{n} = \frac{n - (n + 1 - n \cdot 0,8^n)}{n} = 0,8^n - \frac{1}{n}$$

Der Graph der Funktion $y = f(x) = 0,8^x - \frac{1}{x}$ hat das folgende Aussehen:



Das Maximum liegt bei $x = 3$.

Durch Rechnung erhält man:

$$p_2 = 0,14; p_3 = 0,1787; p_4 = 0,1596; p_5 = 0,12768; p_6 = 0,0955$$

⇒ Die relative Einsparung ist bei $n = 3$ am größten. Sie liegt bei 17,87 %.