UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Rund um die Universität: Mensaessen und Einstellungstests

[illegible]gen zur Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN W[illegible]scheinlichke[illegible]rechnung und Statistik Sek I/II

Das Werk, einschließlich seiner [illegible]ile, ist urheberrech[illegible]n geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzuläss[illegible] un[illegible]afbar. Dies g[illegible]t insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Überset[illegible]ung, Ve[illegible] und öffentliche Zugänglichmachung.

Für jedes Material wurden Fremdrech[illegible]recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere R[illegible]bestehen, b[illegible]ten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe V[illegible]lags-GmbH
Ein Unternehmen d[illegible]Klett G[illegible]
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +[illegible]00-0
Fax +4[illegible]711 62900-[illegible]
schule@raabe.de
www.ra[illegible].de

Red[illegible]tion: Sc[illegible] Orth
Satz: [illegible]ser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrat[illegible]nen: Schirin Orth
[illegible]ildnachw[illegible]is Titel: seb_ra/iStock/Turkey
Lekt[illegible]a Hitzenauer

Rund um die Universität: Mensaessen und Einstellungstests

1 Christine und Susanne sowie vier weitere Freundinnen essen jeden Tag in der Mensa.

1.1 Bevor sie zur Essensausgabe gehen, suchen sie sich einen runden Tisch für sechs Personen aus und reservieren sich einen Platz. Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Sitzreihenfolge um den Tisch gibt es? Beachte: Drehungen der Belegung werden nicht mitgezählt.

1.2 Es ist nur noch ein runder Tisch für acht Personen frei.

1.3. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, sechs Plätze zu belegen?

Vor der Essensausgabe stellen sich die sechs Mädchen geschlossen in einer Reihe an. Wie viele Möglichkeiten des Anstehens gibt es, wenn

1.3.1 keinerlei Einschränkungen gelten,

1.3.2 Christine und Susanne immer in dieser Reihenfolge direkt hintereinander stehen?

1.4 Nach der Auswahl ihrer Menüs gibt es drei Kassen, an denen sie bezahlen können. Auf wie viele verschiedene Arten können sie dies tun, wenn

1.4.1 die Kassen beliebig ausgewählt werden,

1.4.2 Christine und Susanne immer an derselben Kasse zahlen?

2 Auf der Speisekarte der Mensa stehen immer drei Hauptgerichte, ein Fleischgericht (F), ein vegetarisches Gericht (V) sowie eine Salatplatte (S).Aus Erfahrung weiß man, dass F mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %, V mit 10 % und S mit 30 % gewählt wird. Christine und Susanne wählen heute ihr Hauptgericht auf gut Glück aus.

2.1 Bestimmen Sie für dieses Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Es wird zweimal das gleiche Hauptgericht gewählt“ und
B: „Es wird mindestens einmal S gewählt“.

2.2 Überprüfen Sie dann die Ereignisse A und B auf Unvereinbarkeit und auf stochastische Unabhängigkeit.

3.4 An einer Garderobe geben n Personen ihren Schirm ab. Da keine Garderobenmarken ausgegeben wurden, erhält beim Weggehen jede Person rein zufällig irgendeinen der n Schirme.

3.4.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_n bekommt mindestens eine Person ihren Schirm wieder?

3.4.2 Gegen welchen Wert strebt diese Wahrscheinlichkeit P_n, wenn n über alle Grenzen wächst?

Für einen gehobenen Posten haben sich viele Kandidaten beworben. Bevor jemand eingestellt wird, müssen einige Tests bestanden werden.

4 Zuerst wird geprüft, ob die Bewerber gesundheitlich für diesen Posten geeignet sind (Ereignis G). Neun von zehn Bewerbern sind tatsächlich gesundheitlich geeignet. Ein Arzt stuft 95 % der Bewerber richtig ein (Ereignis R). Gesundheitlich geeignet, aber als ungeeignet eingestuft werden 3 % der Bewerber.

4.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und überprüfen Sie, ob der Arzt ein besonders „gutes Auge" für ungeeignete Bewerber besitzt.

4.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Bewerber

4.2.1 geeignet und richtig eingestuft,

4.2.2 weder geeignet, noch richtig eingestuft,

4.2.3 nicht geeignet und richtig eingestuft oder geeignet aber falsch eingestuft?

5 Die Reaktionsfähigkeit wird so überprüft, dass ein Bewerber beim Eintreten eines optischen Signals auf einem Monitor innerhalb einer bestimmten Zeit einen Knopf drücken muss (Treffer). Wegen der kurzen Zeitspanne gelingt dies einem Kandidaten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %.

5.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Kandidat

5.1.1 bei zehn Versuchen drei Treffer (Ereignis E_1),

5.1.2 beim zehnten Versuch den dritten Treffer (Ereignis E_2)?

5.2 Begründen Sie, dass die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch abhängig sind.

5.3 Wie viele Versuche muss ein Bewerber mindestens ausführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens einmal zu treffen?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen, argumentieren
- Problemlösen: Lösungen berechnen
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ereignisse und Ereigniswahrscheinlichkeiten; Ereignisalgebra, Satz von Sylvester, Baumdiagramm und Pfadregeln, Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit; Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Autor: Alfred Müller

Lösung

1.1 An einem runden Tisch gibt es $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Möglichkeiten der Sitzordnung, da die n „Anfänge" wegfallen. Es gibt $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ verschiedene Sitzreihenfolgen.

1.2 Es werden sechs der acht Plätze belegt, d. h., es gibt $\binom{8}{6} = 28$ Möglichkeiten, die sechs Plätze auszuwählen.

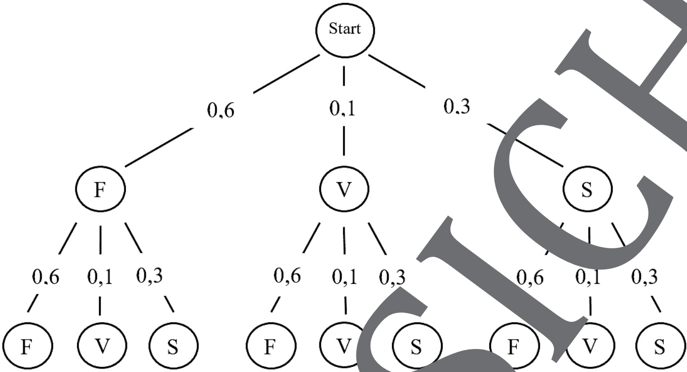
1.3.1 Es gibt $6! = 720$ verschiedene Möglichkeiten des Anstehens.

1.3.2 Christine und Susanne können auf zwei verschiedene Arten hintereinander kommen. Dann gibt es auf den Plätzen 1/2, 2/3, …, 5/6 fünf verschiedene Möglichkeiten. Die restlichen vier Personen können auf 4! Arten permutiert werden. Es gibt $2 \cdot 5 \cdot 4! = 240$ verschiedene Möglichkeiten.

1.4.1 Jede der sechs Personen hat drei Kassen zur Auswahl. Es gibt $3^6 = 729$ verschiedene Arten.

1.4.2 Christine und Susanne können als eine „Person" aufgefasst werden, sodass noch $3^5 = 243$ Möglichkeiten verbleiben.

2.1 Die Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten lassen sich [illegible] einem Baumdiagramm veranschaulichen.



Die Wahrscheinlichkeiten de[illegible] Ereignisse A un[illegible] B werden mithilfe der Pfadregeln bestimmt.

$P(A) = P(\{FF, VV, SS\}) = [illegible]\ 0,1^2 + [illegible]^2 = 0,46 = 46\%$

Mit einer Wahrscheinlichke[illegible] von 46 % wählen sie beide das gleiche Hauptgericht.

$P(B) = P(\{FS, VS, [illegible] SS\})$

$$= 0,6 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,[illegible]\ 0,3 \cdot \left(\underbrace{0,6 + 0,1 + 0,3}_{=1}\right) = 0,51 = 51\%$$

Mit eine[illegible] Wahrs[illegible]einlichk[illegible] von 51 % wählen sie mindestens einmal S.

2.2 Wegen [illegible] B [illegible] $\{SS\}$ [illegible] folgt, dass die Ereignisse A und B nicht unvereinbar sind.

[illegible]egen [illegible] $A \cap B) = 0,3^2 = 0,09 \neq 0,46 \cdot 0,51 = P(A) \cdot P(B)$

[illegible]ind die Ere[illegible]nisse stochastisch abhängig.

2[illegible]1 [illegible]nau einma[illegible] S heißt: Einmal S und dreimal nicht S, wobei das eine S auf jede[illegible] Plätze stehen kann.

$P(E_1) = 4 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 = 0,4116 = 41,16\%$

[illegible]it einer Wahrscheinlichkeit von 41,16 % wird einmal S gewählt.

2.3.2 Es gilt stets: P (mindestens ein …) = 1 – P (kein …), d. h.

$$P(E_2) = 1 - P\left(\left\{\overline{F}\overline{F}\overline{F}\overline{F}\right\}\right) = 1 - 0{,}4^4 = 0{,}9744 = 97{,}44\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,44 % wird mindestens einmal F gewählt.

2.3.3 $P\left(\{FFFF\}\right) = 0{,}6^4 = 0{,}1296 = 12{,}96\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 12,96 % wird viermal F gewählt.

2.3.4 Höchstens einmal V heißt:

$$P(V \le 1) = P(V=0) + P(V=1)$$

$$= B_{0,1}^{4}(V=0) + B_{0,1}^{4}(V=1) = 0{,}9^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3$$

$$= 0{,}6561 + 0{,}2916 = 0{,}9477 = 94{,}77\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,77 % wird höchstens einmal V gewählt.

2.4.1 Susanne bekommt genau dann ihre Salatplatte, wenn von den acht vor ihr stehenden Personen höchstens eine Person eine Salatplatte isst.
Mit den Überlegungen zu 6d) gilt:

$$P(S \le 1) = P(S=0) + P(S=1)$$

$$= B_{0,3}^{8}(S=0) + B_{0,3}^{8}(S=1)$$

$$= 0{,}7^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^7 \approx 0{,}25530 = 25{,}53\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25,53 % bekommt Susanne ihre Salatplatte.

2.4.2 Damit Susanne das alternative Gericht V nicht bekommt, muss es von den acht vor ihr stehenden Personen zweimal gewählt werden

$$B_{0,1}^{8}(V=2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6 \approx 0{,}14880 = 14{,}88\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 14,88 % ist das Gericht V am Ende ausverkauft.

3.1 Mit den Gesetzen der Mengenalgebra gilt:

$$\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cup A) \cap B = \Omega \cap B = B$$

3.2 Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhält man am besten durch Ablesen aus einer Vierfeldertafel, in der die gegebenen Wahrscheinlichkeiten unterstrichen, die anderen ergänzt sind. Berechnet wird zunächst:

$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{B})$$
$$= 0,8 - 0,3 - 0,4 = 0,1$$

	B	$\overline{B}$	3
A	**0,1**	<u>0,4</u>	0,5
$\overline{A}$	<u>0,3</u>	0,2	0,5
	0,4	0,6	1

$P(A) = 0,5;\ P(B) = 0,4;$

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A \cap \overline{B}}) = 1 - 0,4 = 0,6;$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2.$

3.3 Mit P(Y = 1) = P (Y = 2) = p erhält man:

$E(Y) = 1 \cdot p + 2 \cdot p + 3 \cdot 0,4 = 1,65 \quad | -1,2$

$3p = 0,45 \ \Rightarrow p = 0,15$

$\Rightarrow P(Y = 0) = 0,3$

Tabellarisch:

y	0	1	2	3
P(Y = y)	0,3	0,15	0,15	0,4

Varianz Var(Y) und Standardabweichung $\sigma(Y)$:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$
$$= 1 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,15 + 9 \cdot 0,4 - 1,65^2 = 1,6275$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} \approx 1,28$$

Die Varianz Var(Y) ist ein Maß für die Streuung der Werte y um den Erwartungswert E(Y). Die Varianz Var(Y) ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung der Werte y vom Erwartungswert E(Y).

3.4.1 Man stelle sich vor, dass die Personen durchnummeriert sind. Mit E_k sei das Ereignis bezeichnet, dass die Person mit der Nummer k ihren Schirm wieder erhält. Damit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P_n = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right).$$

Auf diesen Ausdruck kann man die Formel von Sylvester anwenden:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P(E_k \cap E_j)$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} P(E_k \cap E_j \cap E_i) - + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right)$$

Es ergibt sich folglich:

$n = 1: \quad P_1 = P(E_1) = 1$

$n = 2: \quad P_2 = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!} = 0,5$

$n = 3: \quad P_3 = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$
$$-P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3} \approx 0,66667$$

$n = 4: \quad P_4 = \ldots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{15}{24} = 0,625$

$n = 5: \quad P_5 = \ldots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{76}{120} \approx 0,63333$

$n = 6: \quad P_6 = \ldots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{455}{720} \approx 0,63194$

usw.

3.4.2 Allgemein gilt:

$$P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$$

Dann gilt zusammen mit der unendlichen Potenzreihe: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \ldots$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n = 1 - e^{-1} \approx 0,063212$$

4.1 Mithilfe der Angaben erhält man die folgende Vierfeldertafel, in der die gegebenen Wahrscheinlichkeiten unterstrichen, die restlichen ergänzt sind:

	R	$\overline{R}$	
G	0,87	<u>0,03</u>	<u>0,90</u>
$\overline{G}$	0,08	0,02	0,10
	<u>0,95</u>	0,05	1

Der Mediziner hat genau dann ein „gutes Auge“ für ungeeignete Bewerber, wenn die Ereignisse $\overline{G}$ und R stochastisch abhängig sind und der Anteil der richtig eingestuften unter den ungeeigneten Bewerbern größer ist als der richtig eingestufte Anteil unter den geeigneten Bewerbern. Wegen $P(\overline{G} \cap R) = 0{,}08 \neq 0{,}095 = 0{,}10 \cdot 0{,}95 = P(\overline{G}) \cdot P(R)$

sind die Ereignisse $\overline{G}$ und R stochastisch abhängig. Es gilt ferner:

$$P_{\overline{G}}(R) = \frac{P(\overline{G} \cap R)}{P(\overline{G})} = \frac{0{,}08}{0{,}10} = 80\,\%,$$

$$P_{G}(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)} = \frac{0{,}87}{0{,}90} = 96{,}67\,\%$$

Der Arzt hat für geeignete Bewerber ein „besseres Auge“ als für ungeeignete Bewerber.

4.2 Aus der Vierfeldertafel liest man ab:

4.2.1 $P(G \cap R) = 0{,}87 = 87\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 87 % ist ein Bewerber geeignet und richtig eingestuft.

4.2.2 $P(\overline{G} \cap \overline{R}) = 0{,}02 = 2\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ist ein Bewerber weder geeignet noch richtig eingestuft.

4.2.3 $P\left[(\overline{G} \cap R) \cup (G \cap \overline{R})\right] = 0{,}08 + 0{,}03 = 0{,}11 = 11\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 11 % ist ein Bewerber entweder nicht geeignet und richtig eingestuft oder geeignet und falsch eingestuft.