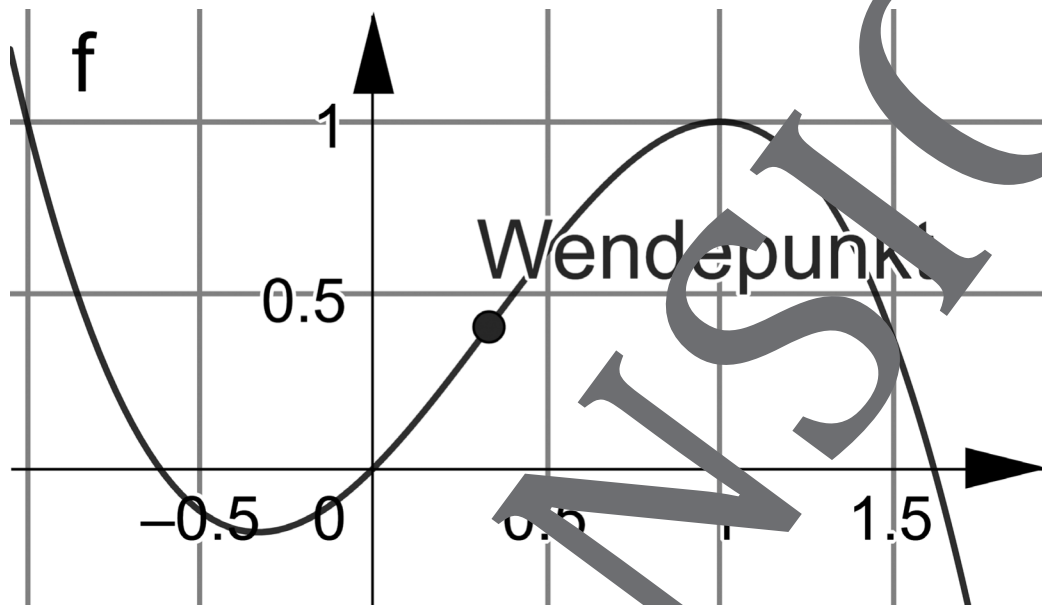


## II.A.49

### Analysis

# Kurvendiskussion – Grundlagen zu Extrem- und Wendepunkten verstehen und festigen

Diana Hauser



© RAABE 2024

Grafik: Diana Hauser

Das Untersuchen von Funktionen und deren Graphen mit charakteristische Eigenschaften wie Extrempunkte, Wendepunkte und Krümmungsverhalten durch mithilfe von höheren Ableitungen ist elementar und muss spätestens im Abitur von den Lernenden im Schlaf beherrscht werden. Diese Unterrichtseinheit legt die Basis dafür, dass dies gelingt. Mit dem Material lernt Ihre Klasse den Unterschied zwischen einer notwendigen und hinreichenden Bedingung kennen und festigt die zugehörigen theoretischen Grundlagen. LearningApps unterstützen dabei das selbstständige Lernen und fördern die Motivation. Differenzierter Unterricht wird zusätzlich durch Übungen auf zwei Niveaustufen ermöglicht.

#### KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Inhalt:	Krümmungsverhalten, Extrempunkte, Wendepunkte, 1. Ableitung, 2. Ableitung, 3. Ableitung, notwendiges und hinreichendes Kriterium

## Auf einen Blick

### Einstieg

M 1 Was sind Extrem- und Wendepunkte? – Grafische Betrachtung

### Erarbeitung

M 2 Lückentext: Wie weise ich Extrem- und Wendepunkte nach? – Theoretische Betrachtung

### Übung

M 3 Finden Sie die Paare – Nachweiskriterien








M 4 Vermischte Aufgaben

M 5 Vermischte Aufgaben

### Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 14.

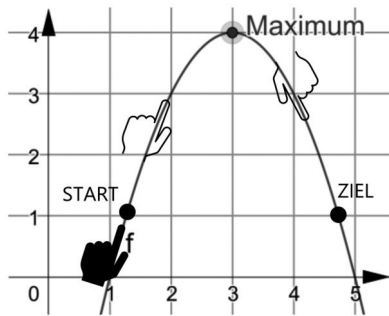
### Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	leichtes Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	LearningApps		Alternative		Selbsteinschätzung

# Was sind Extrem- und Wendepunkte? – Grafische Betrachtung

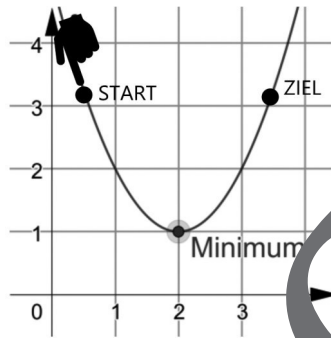
M 1

## Rechts- und Linkskurve – Extrempunkte



Grafik: Diana Hauser

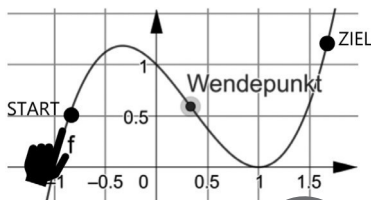
Beginnen Sie im Startpunkt und fahren Sie mit dem Finger auf dem Graphen bis zum Ziel. Hier fahren Sie eine Rechtskurve. Der höchste Punkt ist ein Extrempunkt (hier ein Maximum).



Grafik: Diana Hauser

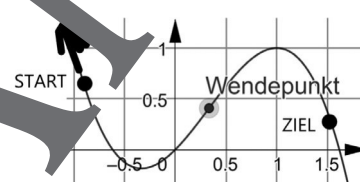
Beginnen Sie im Startpunkt und fahren Sie mit dem Finger auf dem Graphen bis zum Ziel. Hier fahren Sie eine Linkskurve. Der tiefste Punkt ist ein Extrempunkt (hier ein Minimum).

## Übergang zwischen Rechts- und Linkskurve – Wendepunkte



Grafik: Diana Hauser

Beginnen Sie im Startpunkt und fahren Sie mit dem Finger auf dem Graphen bis zum Ziel. Hier fahren Sie zuerst eine Rechtskurve und dann eine Linkskurve. Dort, wo sich die Krümmung ändert, ist ein Wendepunkt.



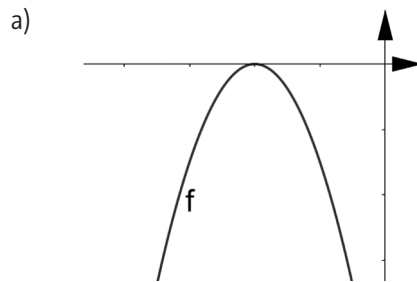
Grafik: Diana Hauser

Beginnen Sie im Startpunkt und fahren Sie mit dem Finger auf dem Graphen bis zum Ziel. Hier fahren Sie zuerst eine Linkskurve und dann eine Rechtskurve. Dort, wo sich die Krümmung ändert, ist ein Wendepunkt.

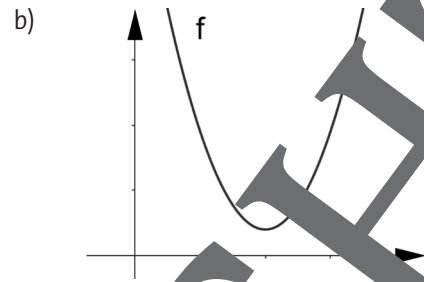
Statt Rechtskurve (bzw. Linkskurve) spricht man auch von rechtsgekrümmt (bzw. linksgekrümmt).

**Aufgabe 1**

Ist der Graph eine Rechts- oder eine Linkskurve? **Zeichnen** Sie das Extremum ein.



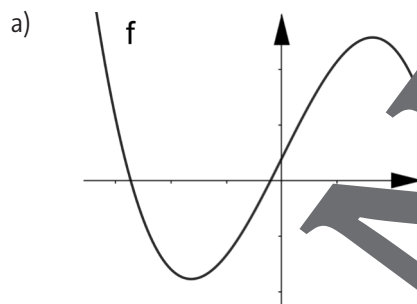
Grafik: Diana Hauser



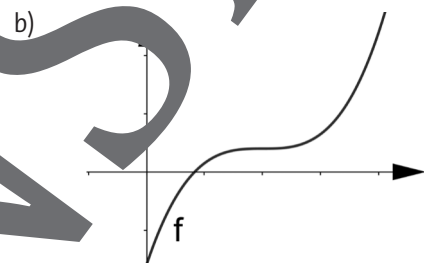
Grafik: Diana Hauser

**Aufgabe 2**

**Zeichnen** Sie den Wendepunkt ein und **bestimmen** Sie, ob der Graph von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht oder umgekehrt.



Grafik: Diana H



Grafik: Diana Hauser

**Aufgabe 3**

**Zeichnen** Sie eine passende Geraden in das Bild. **Kennzeichnen** Sie alle markanten Punkte und das Krümmungsverhalten.



© Michael H./DigitalVision/Getty Images Plus

# Wie weise ich Extrem- und Wendepunkte nach? – Theoretische Betrachtung

M 2

## Aufgabe

Gegeben ist die Funktion  $f(x)$ . Finden Sie sich zu zweit **zusammen** und **füllen** Sie die Lücken. **Nutzen** Sie die Begriffe in den Kästen.



## Extrempunkte

Rechtskurve / Linkskurve /  $f'(x)$  / 2. Ableitung  $f''(x)$  / Extremstellen / + / + / - / - /  $y$ -Wert /  $y$ -Wert / Minimum / Maximum / ungleich / Vorzeichenwechsel /  $f'(x_0) = 0$

## Notwendiges Kriterium

### 1. Ableitung ...

Berechnen Sie die 1. Ableitung \_\_\_\_\_.  
Die Nullstellen der 1. Ableitung sind mögliche \_\_\_\_\_.  
Berechnen Sie also alle  $x_0$ , für die gilt: \_\_\_\_\_



## Hinreichendes Kriterium 1

### ... und Vorzeichenwechsel

Macht die 1. Ableitung in der Nähe der Nullstelle  $x_0$  einen \_\_\_\_\_, so liegt dort eine Extremstelle vor.  
Wechselt das Vorzeichen von \_\_\_\_\_, so ist dort ein lokales Maximum.  
Wechselt das Vorzeichen von \_\_\_\_\_ nach \_\_\_\_\_, ist dort ein lokales Minimum.



## Hinreichendes Kriterium 2

### ... und 2. Ableitung

Berechnen Sie die \_\_\_\_\_.  
Die 2. Ableitung muss an der Stelle  $x_0$  \_\_\_\_\_ 0 sein. Berechnen Sie  $f''(x_0)$ .  
Ist  $f''(x_0) < 0$ , so liegt dort ein lokales \_\_\_\_\_ vor.  
Ist  $f''(x_0) > 0$ , so liegt dort ein lokales \_\_\_\_\_ vor.



Bei einem lokalen Maximum macht der Graph von  $f$  eine \_\_\_\_\_.  
Bei einem lokalen Minimum macht der Graph von  $f$  eine \_\_\_\_\_.  
Die Kombination aus Extremstelle (\_\_\_\_\_) und zugehörigem Funktionswert (\_\_\_\_\_) nennt man Extrempunkt.

## Finden Sie die Paare – Nachweiskriterien

M 3

Vorderseite

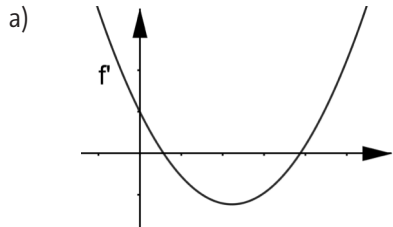
<p><b>Nachweis Minimum</b></p> <p>über</p> <p>Vorzeichenwechsel</p>	<p><b>Nachweis Minimum</b></p> <p>über</p> <p>2. Ableitung</p>
<p><b>Nachweis Maximum</b></p> <p>über</p> <p>Vorzeichenwechsel</p>	<p><b>Nachweis Maximum</b></p> <p>über</p> <p>2. Ableitung</p>
<p><b>Nachweis Wendepunkt</b></p> <p>über</p> <p>Vorzeichenwechsel</p>	<p><b>Nachweis Wendepunkt</b></p> <p>über</p> <p>3. Ableitung</p>

## Vermischte Aufgaben

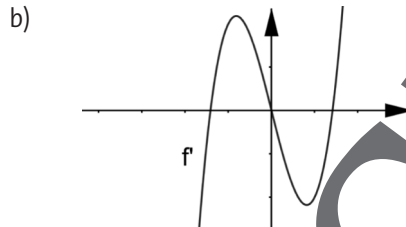
M 4

### Aufgabe 1

Zu sehen ist jeweils der Graph der 1. Ableitung von  $f$ . Geben Sie die Anzahl der möglichen Extremstellen des Graphen von  $f$  an und begründen Sie.



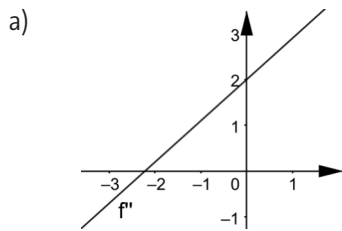
Grafik: Diana Hauser



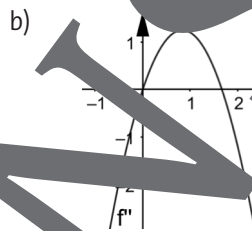
Grafik: Diana Hauser

### Aufgabe 2

Zu sehen ist jeweils der Graph der 2. Ableitung von  $f$ . Machen Sie Aussagen über das Krümmungsverhalten und mögliche Wendepunkte von  $f$ .



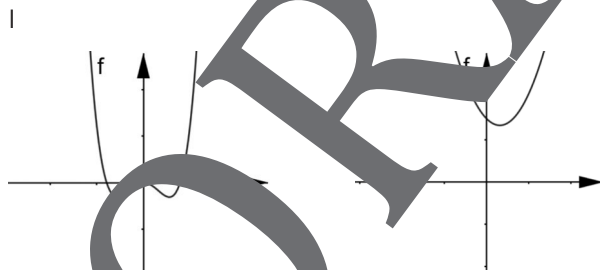
Grafik: Diana Hauser



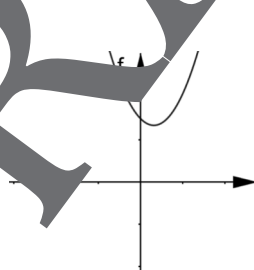
Grafik: Diana Hauser

### Aufgabe 3

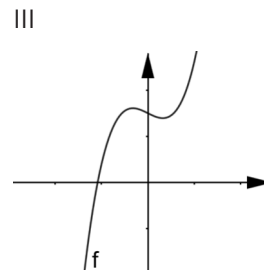
Gegeben sind die Graphen von  $f$  und  $f''$ . Ordnen Sie richtig zu.



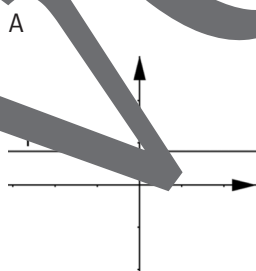
Grafik: Diana Hauser



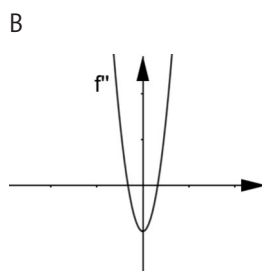
Grafik: Diana Hauser



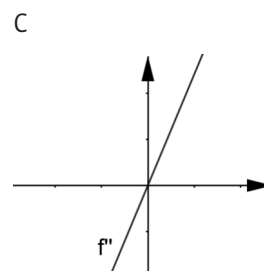
Grafik: Diana Hauser



Grafik: Diana Hauser



Grafik: Diana Hauser



Grafik: Diana Hauser

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie alle Extrem- und Wendepunkte.

- a)  $f(x) = 17x^2 - 3x$   
b)  $f(x) = -0,5x^3 + 5$

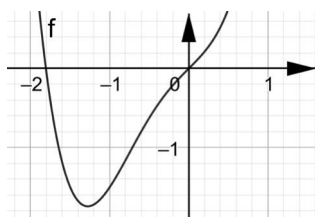
**Aufgabe 5**

Bestimmen Sie rechnerisch die Intervalle, in denen der Graph von  $f$  eine Rechtskurve ist, und die Intervalle, in denen der Graph von  $f$  eine Linkskurve ist.

- a)  $f(x) = -4x^2 + x + 2$   
b)  $f(x) = 2x^3 + 4x + 3$

**Aufgabe 6**

Gegeben ist der Graph einer Funktion  $f$ .



Grafik: Diana Hauser

Welche Aussage ist richtig bzw. falsch?

Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- Für  $-2 < x < -1,28$  ist  $f'(x) < 0$ .
- Der Graph von  $f$  hat im abgebildeten Bereich zwei Extremstellen.
- Der Graph von  $f$  hat im abgebildeten Bereich zwei Wendepunkte.
- Im Intervall  $]0; 0,5[$  gilt  $f''(x) \leq 0$ .



# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

