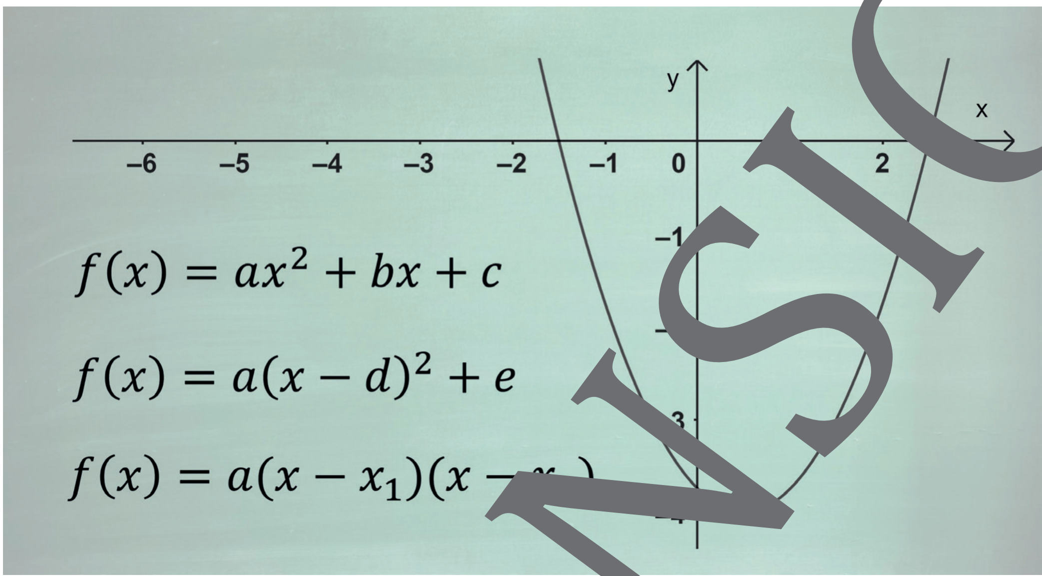
I.C.72

Algebra

Darstellungsformen der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion

Stephan Ziemer



Grafik: Redaktion

Sobald man sich mit quadratischen Funktionen befasst, wird man früher oder später auf verschiedene Darstellungen bei den Funktionsgleichungen [illegible]: die Normalform, die Scheitelpunktform und die faktorisierte Form. Diese Unterrichtseinheit bietet Ihnen einen entdeckenden innermathematischen Einstieg in [illegible] Thematik. Nach der Einführung der drei Darstellungsformen lernt Ihre Klasse anhand einer Mindmap und eines Arbeitsplanes zur eigenständigen Erarbeitung die verschiedenen mathematischen Verfahren zum Wechsel von der einen in die andere Darstellungsform kennen. Dabei kommt der [illegible]rechner für die Selbstkontrolle der Lernenden zum Einsatz.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: [illegible]/10
Dauer: [illegible] Unterrichtsstunden (Minimalplan 6)
Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
[illegible]: Quadratische Funktion; Funktionsgleichung; Scheitelpunktform; Parameterform; faktorisierte Form; Graph

Auf einen Blick

Einstieg

Thema:	**Drei Darstellungsformen der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion**
M 1	Eine überraschende Erkenntnis
M 2	Drei Darstellungsformen der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion – Übung
M 3	Drei Darstellungsformen der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion – Hilfekarten

Erarbeitung

Thema:	**Darstellungsformwechsel der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion**
M 4	Wechsel zwischen den drei Darstellungsformen (Mindmap)
M 5	Laufzettel
M 6	1. Binomische Formel(n) anwenden – Einstieg und Übung
M 7	1. Binomische Formel(n) anwenden – Hilfekarten
M 8	2. Ausmultiplizieren – Einstieg und Übung
M 9	2. Ausmultiplizieren – Hilfekarten
M 10	3. Scheitelpunkt bestimmen – Einstieg und Übung
M 11	3. Scheitelpunkt bestimmen – Hilfekarten
M 12	4. Wurzelziehen – Einstieg und Übung
M 13	4. Wurzelziehen – Hilfekarten
M 14	5. *pq*-Formel anwenden – Einstieg und Übung
M 15	5. *pq*-Formel anwenden – Hilfekarten
M 16	6. Quadratische Ergänzung – Einstieg und Übung
M 17	6. Quadratische Ergänzung – Hilfekarten

Übung

Thema:	**Darstellungsformwechsel der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion**
M 18	Vernetztes Üben

Lernerfolgskontrolle

Thema:	**Darstellungsformwechsel der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion**
M 19	Lernerfolgskontrolle

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 35.

Minimalplan

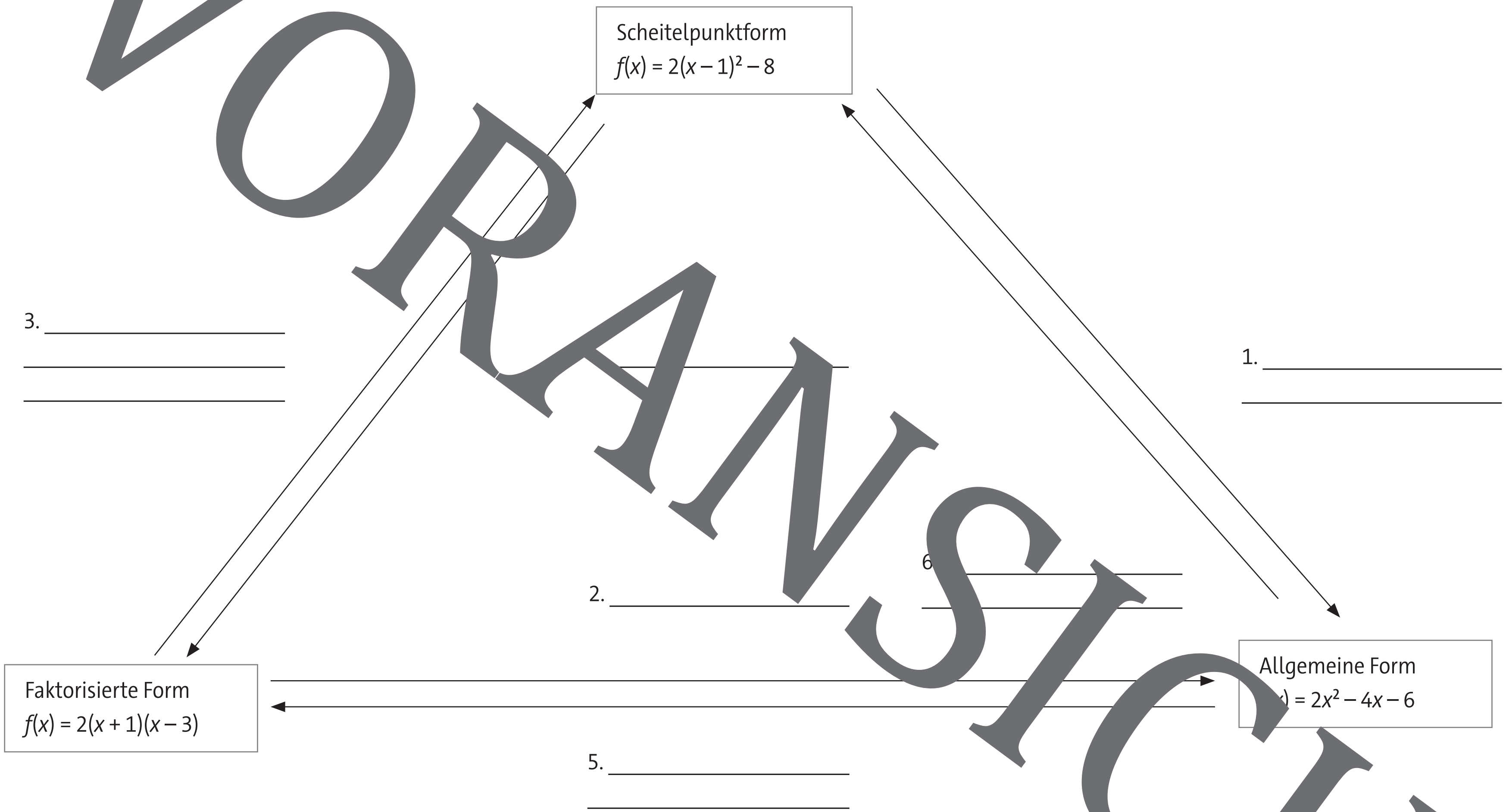
Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit in sechs Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1	Darstellungsformen *(Stunde 1)*
M 4, M 6–M 15	Darstellungsformwechsel *(Stunde [illegible])*
M 18	Vernetztes Üben *(Stunde [illegible])*
M 19	Lernerfolgskontrolle *(Stunde 6)*

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgabe	Alternative	Download

M 4 Wechsel zwischen den drei Darstellungsformen (Mindmap)



M 8

2. Ausmultiplizieren (Faktorisierte Form → Allg. Form)

Ausgangssituation:
Gegeben ist eine quadratische Funktion in der Faktorisierten Form.

Ziel:
Wechsle von der Faktorisierten Form in die allgemeine Form.

Aufgabenstellung:
Wechsle die Darstellungsform der quadratischen Funktion f in der Faktorisierten Form $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$ in die Allgemeine Form.

Vorgehen

1. Die Terme in den Klammern miteinander multiplizieren.
2. Passende Terme zusammenfassen.
3. Durch Multiplikation mit dem Faktor 2 die Klammer auflösen.

Lösung

$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$
$=$
$=$
$=$

Aufgabe 1

Zeige durch Ausmultiplizieren, dass die Faktorisierte Form mit der nebenstehenden Allgemeinen Form identisch ist.

a) $f(x) = (x + 5)(x + 6)$	$f(x) = x^2 + 11x + 30$
b) $g(x) = (x - 4)(x + 2)$	$g(x) = x^2 - 2x - 8$
c) $h(x) = (x - 3)(x - 2)$	$h(x) = x^2 - 5x + 6$
d) $i(x) = 4(x - 1)(x + 1)$	$i(x) = 4x^2 - 4$
e) $j(x) = -3(x + 2)(x - 5)$	$j(x) = -3x^2 + 9x + 30$

Aufgabe 2

[illegible] die Paare und das Lösungswort.

a) $f(x) = (x + 4)(x + 10)$	$n(x) = x^2 + 7x - 18$	(A)
b) $g(x) = (x - 2)(x + 9)$	$o(x) = -x^2 - 2x + 15$	(R)
c) $h(x) = (x - 3)(x - 6)$	$p(x) = 4x^2 - 36$	(N)
d) $i(x) = 2(x - 2)(x + 7)$	$q(x) = 2x^2 + 10x - 28$	(A)
e) $j(x) = -(x + 5)(x - 3)$	$r(x) = x^2 - 9x + 18$	(C)
f) $k(x) = -4(x - 2)(x - 1)$	$s(x) = 4x^2 - 4x$	(A)
g) $l(x) = 4(x + 3)(x - 3)$	$t(x) = -4x^2 + 12x - 8$	(E)
h) $m(x) = 4(x + 0)(x - 1)$	$u(x) = x^2 + 14x + 40$	(M)

Lösungswort: __ __ __ __ __ __ __ __

Aufgabe 3

Offenes Memory auf Zeit (Lerntempo-Duett)

Wenn du die Aufgaben 1 und 2 gelöst hast, **stell dich hin** und **warte**, bis noch eine Person aufsteht. **Setzt euch zusammen**, um das folgende Spiel zu spielen: Ihr seht aufgedeckte Memory-Karten, auf denen Funktionsgleichungen von quadratischen Funktionen aufgedruckt sind, die einen in der Faktorisierten Form, die anderen in der Allgemeinen Form. Jede Person **wählt** einen unterschiedlichen Farbstift: Wer ein Pärchen gefunden hat, **verbindet** die beiden passenden Karten mit dem eigenen Farbstift. Wer am Ende die meisten Pärchen gefunden hat, hat gewonnen.

$f(x) = -3x^2 + 3x + 36$	$f(x) = (x-2)(x+8)$	$f(x) = 3(x+1)(x+2)$	$f(x) = -$[illegible]$+ 7x$ [illegible] 12	$f(x) = 2(x$ [illegible]$)(x+5)$
$f(x) = x^2 + 6x$ [illegible] 16	$f(x) = -$[illegible]$(x+3)($[illegible]$- 4)$	$f(x) = -(x-3)(x-4)$	$f(x) = 3x^2 + 9x + 6$	$f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

M 9

2. Ausmultiplizieren
(Faktorisierte Form → Allg. Form) – Hilfekarten

Hilfekarten zur „Lösung der Aufgabenstellung“

Hilfen zu „$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$“

1. Hilfekarte: Multipliziere zuerst die Klammern aus
2. Hilfekarte: $(x + 1)(x - 3) = x \cdot (x - 3) + 1 \cdot (x - 3)$
3. Hilfekarte: $(x + 1)(x - 3) = x \cdot x - x \cdot 3 + 1 \cdot x - 1 \cdot 3$

Hilfekarten zu Übungsaufgabe 1

a) $f(x) = (x + 5)(x + 6)$ $= x \cdot x + x \cdot 6 + 5 \cdot x + 5 \cdot 6$
b) $g(x) = (x - 4)(x + 2)$ $= x \cdot x + x \cdot 2 - 4 \cdot x - 4 \cdot 2$
c) $h(x) = (x - 3)(x - 2)$ $= x \cdot x - x \cdot 2 - 3 \cdot x + 3 \cdot 2$
d) $i(x) = 4(x - 1)(x + 1)$ $= 4(x \cdot x + x \cdot 1 - 1 \cdot x -$ [illegible]
e) $j(x) = -3(x + 2)(x - 5)$ $= -3(x \cdot x - x \cdot 5 + 2$ [illegible] $- 2 \cdot 5$

Hilfekarten zu Übungsaufgabe 2

a) $f(x) = (x + 4)(x + 10)$ $= x \cdot x + x \cdot 10 + 4 \cdot x +$ [illegible] 10
b) $g(x) = (x - 2)(x + 9)$ $=$ [illegible]
c) $h(x) = (x - 3)(x - 6)$ $= x \cdot x$ [illegible] $6 - 3 \cdot x + 3 \cdot 6$
d) $i(x) = 2(x - 2)(x + 7)$ $= 2(x \cdot x + x$ [illegible] $2 \cdot x - 2 \cdot 7)$
e) $j(x) = -(x + 5)(x -$ [illegible] $= -(x \cdot x - x \cdot 3 + 5$ [illegible] $3)$
f) $k(x) = -4(x - 2)(x$ [illegible] [illegible] $(x \cdot x - x \cdot 1 - 2 \cdot$ [illegible] $+ 2 \cdot 1)$
g) $l(x) = 4(x + 3)(x - 3)$ $= 4($ [illegible] $x - 3 \cdot 3)$
h) $m(x) = 4(x + 0)(x - 1)$ $=$ [illegible] $x)(x - 1)$ [illegible] $4(x^2 - x)$

Hilfe[illegible]arten zu Ü[illegible]ungsaufgabe

$(x - 2)($[illegible] $=$ [illegible] $x + x \cdot 8 - 2 \cdot x$ [illegible] $2 \cdot 8$
$3(x + 1)(x + 2$ [illegible] $(x \cdot x + x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2)$
[illegible] $1)(x + 5) = 2($ [illegible] $\cdot 5 + 1 \cdot x + 1 \cdot 5)$
$-3(x +$ [illegible] $- 4) = -3$ [illegible] $x \cdot x - x \cdot 4 + 3 \cdot x - 3 \cdot 4)$
$-(x - 3)(x$ [illegible] $= -(x \cdot x - x \cdot 4 - 3 \cdot x + 3 \cdot 4)$

M 19 Lernerfolgskontrolle

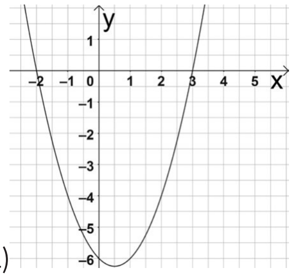
Aufgabe 1

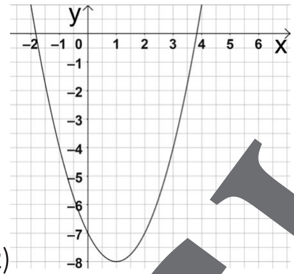
In der Tabelle unten sind drei quadratische Funktionen mit ihren Funktionsgleichungen gegeben. **Fülle** die nachfolgende Tabelle aus, indem du ...

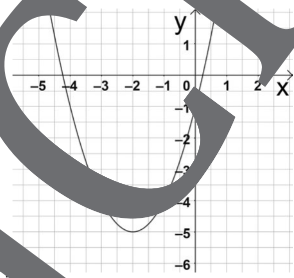
a) ... jeweils **angibst**, um welche Darstellungsform es sich handelt (3 Pkt.),

b) ... jeweils **angibst**, welche Informationen du – ohne den Funktionsgraphen zu zeichnen – nur aus der Funktionsgleichung direkt ablesen kannst (5 Pkt.),

c) ... den passenden Funktionsgraphen **angibst**. (3 Pkt.)

1) 

2) 

3) 

Funktionsgleichung	$f(x) = (x-3)(x+2)$	$g(x) =$ [illegible] 1	$h(x) = (x-1)^2 - 8$
a) **Darstellungsform**			
b) **Informationen**			
c) **Funktionsgraph**			

Aufgabe 2

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit ihrer Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform $f(x) = 2(x-3)^2 - 50$. Gib im Folgenden auch die Namen der Umformungsverfahren jeweils an.

a) **Forme** diese Scheitelpunktform in die Allgemeine Form **um**. (4 Pkt.)
(Keine Lösung? Dann rechne mit $f(x) = 4x^2 - 24x - 64$ bei b) weiter.)

b) **Forme** die Allgemeine Form aus a) in die Faktorisierte Form **um**. (6 Pkt.)
(Keine Lösung? Dann rechne mit $f(x) = 8(x+2)(x-8)$ bei c) weiter.)

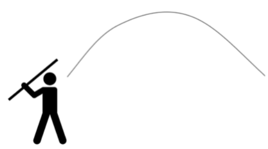
c) **Forme** die Faktorisierte Form aus b) in die Scheitelpunktform **um**. (5 Pkt.)

d) **Forme** die Scheitelpunktform aus der Aufgabenstellung in die Faktorisierte Form **um**. (5 Pkt.)
(Keine Lösung? Dann rechne mit $f(x) = 8(x+2)(x-8)$ bei e) weiter.)

e) **Forme** die Faktorisierte Form in die Allgemeine Form **um**. (3 Pkt.)

Aufgabe 3

Gegeben ist eine quadratische Funktion h, deren Graph die Flughöhe eines Speeres beim Speerwurf modelliert, wobei $h(x)$ die Flughöhe und x die horizontale Entfernung des Speeres zum Abwurfpunkt angibt. **Geben** Sie jeweils **begründet an**, welche Darstellungsform der Funktion h zur Untersuchung der Fragestellung am besten geeignet ist.



a) Aus welcher Höhe wird der Speer abgeworfen? (2 Pkt.)

b) Wie weit fliegt der Speer? (2 Pkt.)

c) Welches ist die größte Höhe, die der Speer erreicht und in welcher horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt wird diese erreicht? (2 Pkt.)