II.A.45

Analysis

Zusammengesetzte Funktionen – Strukturen erkennen und kombinieren

Nathalie Verné

Lernende kämpfen oft damit, mathematische Theorie zu entschlüsseln und in konkreten Aufgabenstellungen anzuwenden. Dieses Material geht detailliert auf zusammengesetzte Funktionen ein, um ein tieferes Verständnis über die dahinterstehenden Zusammenhänge zu vermitteln. Eine *PowerPoint*-Präsentation zum Einstieg mit dem konkreten Beispiel der Herzfrequenz macht neugierig und motiviert die Lernenden dazu, nicht nur die Formeln zu lernen, sondern die Komponenten und Konzepte selbst zu erforschen und anzuwenden. Merk- und Arbeitsblätter unterstützen die Lernenden dabei, den Stoff zu erfassen, zu reflektieren und anzuwenden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12, Sek. II
Dauer:	9 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Inhalt:	Zusammengesetzte Funktionen, Verkettung, Graphen
Zusatzmaterialien:	*PowerPoint*-Präsentation

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Al = Anleitung; Mb = Merkblatt
Planung für 9 Stunden

Einstieg

PowerPoint-Präsentation zum Download als Zusatzmaterial.

Benötigt:
- ☐ Beamer/Whiteboard/Dokumentenkamera/Laptop
- ☐ Folienkopie bzw. digitale Fassung der Präsentation

Vorwissen

M 1 (Ab)	Die wichtigsten Funktionstypen erkennen

Erarbeitung I

Thema:	**Zusammengesetzte Funktionen in der Theorie**
M 2 (Mb)	Begriffserklärungen und Notation zusammengesetzter Funktionen
M 3 (Mb)	Begriffserklärungen und Notation verketteter Funktionen

Übung I

Thema:	**Zusammengesetzte Funktionen erkennen und das neue Wissen anwenden**
M 4 (Ab)	Funktionen-Challenge mit Übungsaufgaben zu zusammengesetzten und verketteten Funktionen
M 5 (Ab)	Zusammengesetzte Funktionen vertieft üben

Erarbeitung II

Thema:	**Grundlagen und Theorie zu Funktionsgraphen und Asymptoten**
M 6 (Mb)	Funktionsgraphen und Asymptoten im Blick

Übung II

Thema:	**Zusammengesetzte Funktionen erkennen und das neue Wissen anwenden**
M 7 (Al)	Graphen zusammengesetzter Funktionen und Asymptoten mit GeoGebra entdecken
M 8 (Ab)	Funktionsgraphen und Asymptoten

Lernerfolgskontrolle

Thema: **Zusammengesetzte Funktionen verstehen**

M 9 (Ab) Zusammengesetzte Funktionen – Testen Sie Ihr Wissen

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 16.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei Stunden mit den folgenden Materialien:

	PowerPoint-Präsentation zum Einstieg
M 2 (Mb)	Begriffserklärungen und Notation zusammengesetzter Funktionen
M 3 (Mb)	Begriffserklärungen und Notation verketteter Funktionen
M 4 (Ab)	Deine Funktionen-Challenge mit Übungsaufgaben zu zusammengesetzten und verketteten Funktionen

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgabe	Alternative	Selbsteinschätzung

Erarbeitung: Begriffserklärungen und Notation zusammengesetzter Funktionen

M 2

Funktionen

Eine **Funktion** f ist eine mathematische Beziehung oder Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge (der Definitionsmenge D) **genau ein** Element aus einer anderen Menge (der Zielmenge R) zuordnet.

Beispiel: $f(x)=2x+3$

Die **unabhängige Variable** x repräsentiert die Werte aus dem Definitionsbereich, die in den Funktionsausdruck eingesetzt werden.

Beispiel: $f(x)=2x+3$, hier ist x die unabhängige Variable.

Die **abhängige Variable** $f(x)$ ist der Ausgabewert einer Funktion, der entsteht, wenn man die unabhängige Variable in die Funktionsvorschrift eingesetzt wird.

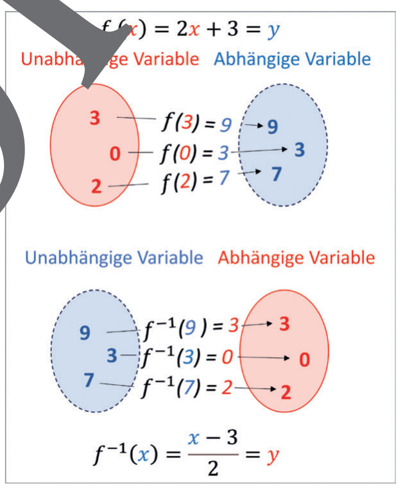
Beispiel: $f(x)=2x+3$, hier ist $f(x)$ die abhängige Variable. Für $x=3$ ist der Funktionswert: $f(3)=2\cdot 3+3=9$

Eine **Umkehrfunktion** f^{-1} einer Funktion f ist eine Funktion, bei der die Rollen von der unabhängigen Variablen und der abhängigen Variablen vertauscht sind.

Beispiel: Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ von $f(x)=2x+3$ bildet man wie folgt:

1. $f(x)=y$ setzen $\Rightarrow y=2x+3$
2. Auflösen der Gleichung nach $x \Rightarrow x=\frac{y-3}{2}$
3. Vertauschen von x und y $\Rightarrow y=\frac{x-3}{2}$

Man kann die Probe machen, indem man die ursprüngliche Funktion in die Umkehrfunktion einsetzt: $f^{-1}(2x+3)=\frac{2x+3-3}{2}=x$. Die Probe fällt richtig aus, wenn man als Ergebnis die unabhängige Variable x erhält, die man ursprünglich eingesetzt hat. Dies ist eine wichtige Eigenschaft von Umkehrfunktionen: Sie „heben“ die ursprüngliche Funktion auf, wenn sie aufeinander angewendet werden.



Zusammengesetzte Funktionen

Eine **zusammengesetzte Funktion** entsteht, wenn zwei oder mehr Funktionen miteinander verknüpft werden.

Die **Summe** $\boldsymbol{f+g}$ von $\boldsymbol{f(x)+g(x)}$ ist eine zusammengesetzte Funktion, bei der die Werte von $f(x)$ und $g(x)$ addiert werden.
Beispiel: Wenn $f(x)=2x$ und $g(x)=3x+1$, dann ist $f(x)+g(x)=2x+3x+1=5x+1$.
Die **Differenz** $\boldsymbol{f-g}$ von $\boldsymbol{f(x)-g(x)}$ ist eine zusammengesetzte Funktion, bei der die Werte von $f(x)$ und $g(x)$ subtrahiert werden.
Beispiel: Wenn $f(x)=2x$ und $g(x)=3x+1$, dann ist $f(x)-g(x)=2x-(3x+1)=-x-1$.
Das **Produkt** $\boldsymbol{f\cdot g}$ von $\boldsymbol{f(x)\cdot g(x)}$ ist eine zusammengesetzte Funktion, bei der die Werte von $f(x)$ und $g(x)$ miteinander multipliziert werden.
Beispiel: Wenn $f(x)=2x$ und $g(x)=3x+1$, dann ist $f(x)\cdot g(x)=2x\cdot(3x+1)=6x^2+2x$.
Der **Quotient** $\boldsymbol{f:g}$ von $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}}$ ist eine zusammengesetzte Funktion, bei der die Werte von $f(x)$ durch die Werte von $g(x)$ geteilt werden.

Beispiel: Wenn $f(x)=6x$ und $g(x)=2x$, dann ist $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6x}{2x}=3$.

Übung: Zusammengesetzte Funktionen vertieft üben M 5

Aufgabe 1

Die Funktion $h(x)$ ist jeweils aus einer Verknüpfung/Verkettung von $f(x) = x + 1$ und der Funktion $g(x)$ entstanden. **Geben** Sie eine mögliche Funktion $g(x)$ sowie eine passende Art der Verknüpfung/Verkettung **an**, um zusammen mit $f(x)$ die Funktion $h(x)$ zu erhalten.

Challenge: Schaffen Sie es, die Funktionen und die Verknüpfung so zu wählen, dass alle Ihnen bekannten Verknüpfungen genau einmal vorkommen?

Beispiel: $h(x) = x^2 + 1$	**$g(x) = x^2$**	**$h(x) = f(g(x))$**
a) $h(x) = x + 1$		
b) $h(x) = -x^2 - x$		
c) $h(x) = -2x^2 + 1$		
d) $h(x) = -2x + 2$		
e) $h(x) = -2x - 2$		
f) $h(x) = x^2 + 2x + 1$		

Aufgabe 2

Vergleichen Sie Ihre Lösungen aus **Aufgabe 1** mit den Lösungen einer anderen Person. Welche Möglichkeiten hat die andere Person gefunden? Hatten Sie diese auch bedacht?

Aufgabe 3

Ordnen Sie die Funktionsgraphen 1)–6) den in Aufgabe 1 genannten Funktionen $h(x)$ **zu**.