Lineare Algebra und analytische Geometrie

Das Gauß-Verfahren – Lineare Gleichungssysteme in realitätsnahen Kontexten

Johann-Georg Vogelhuber

© alvarez/E+

Lineare Gleichungssysteme sind ein wichtiges Hilfsmittel in vielen Anwendungssituationen und auch von großer Bedeutung in der innermathematischen Anwendung. Motivieren Sie die Lernenden durch die Bearbeitung von realitätsnahen Aufgaben zur Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen und dem Gauß-Verfahren. Kontrolllösungen, *LearningSnacks* und Erklärvideos bieten Hilfestellung bei der individuellen Bearbeitung und fördern die Selbstständigkeit.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: Sek. II
Dauer: [illegible] Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)
Inhalt: Gauß-Verfahren; Lösung linearer Gleichungssysteme
Kompetenzen: mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; In = Infomaterial; Tp = Hilfematerial
Planung für 6–8 Stunden

Einstieg

Thema:	**Problemorientierter Unterrichtseinstieg**
M 1 (Ab)	Ein neuer Auftrag für die Druckerei – Anwendung von linearen Gleichungssystemen
M 2 (Ab)	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Erarbeitung

Thema:	**Das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme**
M 3 (Ab)	Ein neues Schild für die Agentur – lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten
M 4 (In)	Das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme
M 5 (Tp)	Hilfematerial zur Bearbeitung von M 3
M 6 (Ab)	Darstellung und Lösung von linearen Gleichungssystemen in Matrixschreibweise

Ergebnissicherung

Thema:	**Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten**
M 7 (Ab)	Klapp[illegible]t Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Vertiefung

Thema:	**Lineare Gleichungssysteme**
M 8 (Ab)	Analyse der Server-Auslastung – lineare Gleichungssysteme mit vier Unbekannten
M 9 (Ab)	Das Gauß-Jordan-Verfahren
M 10 (Ab)	Anzahl Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Lernerfolgskontrolle

Thema:	**Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten**
M 11 (Ab)	Gauß-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 18.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei bis drei Stunden mit den folgenden Materialien:

Thema:	**Das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme**
M 3 (Ab)	Ein neues Schild für die Agentur – lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten
M 4 (In)	Das Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme
M 5 (Tp)	Hilfematerial zur Bearbeitung von M 3
M 7 (Ab)	Klapptest Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgaben	Alternative	Selbsteinschätzung

M 1 Einstieg: Ein neuer Auftrag für die Druckerei – Anwendung von linearen Gleichungssystemen

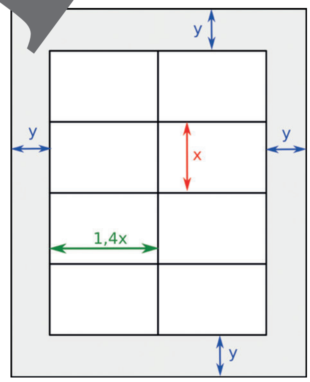
© alvarez/E+

Jakob arbeitet als Auszubildender bei der Werbeagentur „Media Parts“. Die Werbeagentur hat auch eine eigene Druckerei, in der Werbematerialien für die Kunden in größerer Stückzahl hergestellt werden können. Für den neuesten Kundenauftrag sollen Visitenkarten in besonderer Form hergestellt werden. Jakob erhält dazu von seiner Vorgesetzten Frau Schmidt neue Arbeitsanweisungen:

Frau Schmidt: „Wir müssen für einen unserer Kunden neue Visitenkarten gestalten. Diese Visitenkarten sollen etwas größer sein als üblich. Dazu sollst du ausrechnen, wie groß die Karten werden können.“

Jakob: „So was Ähnliches habe ich doch schon mal berechnet. Welche Anforderungen gibt es dazu?“

Frau Schmidt: „Pro Kartonbogen sollen 8 Karten gedruckt werden können. Außerdem muss die Breite der Visitenkarten 1,4-mal so groß sein wie die Höhe. Ich habe dazu schon eine entsprechende Skizze vorbereitet.“



Jakob: „Verstehe. Also x ist die Höhe einer Visitenkarte. Was ist mit y gemeint?“

Frau Schmidt: „Damit wir die Karten später ausstanzen können, brauchen wir einen umlaufenden gleich breiten Rand. Die Größe y ist die Breite dieses Randes. Die Kartonbögen haben an der kurzen Seite 225 mm und an der langen Seite 300 mm.“

Analyse

Was muss Jakob genau berechnen?

Welche Informationen hat er dazu gegeben?

Welche Gleichungen kann er aus diesen Informationen herleiten?

Aufgabe

Lösen Sie das Gleichungssystem, das Sie mithilfe der Analysefragen aufgestellt haben, um so die notendigenen Abmessungen zu berechnen.

Tipp: Auf dem Material **M 2** finden Sie eine Wiederholung zu den Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.

Einstieg: Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

M 2

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie die Lücken:

Für lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei Unbekannten gibt es mehrere bekannte Lösungsverfahren: Das ______________________________: Um das LGS zu lösen, stellt man eine Gleichung nach einer der Variablen um und __________ dieses Ergebnis dann in die andere Gleichung _____. So erhält man eine lineare Gleichung mit nur ________ Variablen, die einfach gelöst werden kann.

Das Gleichsetzungsverfahren: Um das LGS zu lösen, stellt man ____________ Gleichungen nach einer der _____________ um, und __________ anschließend die Ergebnisse gleich. Die so entstandene lineare Gleichung kann wieder einfach gelöst werden.

Das _______________________________ basiert auf zwei möglichen Äquivalenzumformungen. Man darf bei diesem Verfahren Gleichungen mit einer Konstanten ________________ oder zwei Gleichungen _______________________________.

Tipp: Mit dem verlinkten *LearningSnack* https://raabe.click/learningsnacks-IIB28-M2-A1 können Sie Ihre Ergebnisse kontrollieren.

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgende Beispielaufgabe mit dem Additionsverfahren. Die notwendigen Rechenschritte sind in der Tabelle bereits beschrieben.

$$\left|\begin{array}{l} 5x - 2y = 1 \\ 3x + [illegible] = 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} (I) \\ (II) \end{array}$$

Additionsverfahren

1.	Gleichungen äquivalent so umformen, dass die Koeffizienten (Vorzahlen) der Variablen ***y*** bis auf das Vorzeichen übereinstimmen.	
2.	Die entstandenen Gleichungen addieren und nach der Variablen ***x*** auflösen.	
3.	Den gefundenen Wert für x in eine der beiden Gleichungen einsetzen und nach der Variablen ***y*** auflösen.	
4.	Lösungsmenge aufschreiben	

Tipp: Mit dem verlinkten LearningSnack https://raabe.click/learningsnacks-IIB28-M2A2 können Sie Ihre Ergebnisse kontrollieren.

Erarbeitung: Darstellung und Lösung von linearen Gleichungssystemen in Matrixschreibweise

M 6

https://raabe.click/video-IIB28-M6

Matrixschreibweise
Bei der Matrixschreibweise handelt es sich um eine vereinfachte Möglichkeit, den Lösungsweg für ein lineares Gleichungssystem zu notieren. Im Prinzip lässt man bei dieser Notation nur die Variablen aus.

Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{lllcr|l} 2\cdot x & +y & +2{,}5\cdot z & = & 210 & \mathrm{I} \\ 2\cdot x & & 5\cdot z & = & 290 & \mathrm{II} \\ 2\cdot x & +0{,}5\cdot y & -2{,}5\cdot z & = & 0 & \mathrm{III} \end{array}\right.$$

aus der Anwendungssituation **M 3** notiert man in Matrixschreibweise als

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2{,}5 & 210 \\ 2 & 0 & 5 & 290 \\ 2 & 0{,}5 & -2{,}5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

Die ersten drei Spalten entsprechen dabei den Koeffizienten für die Variablen x, y und z. Die Rechenschritte zur Lösung des Gleichungssystems bleiben unverändert. Es ändert sich lediglich die Schreibweise.

Aufgabe

Vervollständigen Sie den folgenden Lösungsweg in Matrixschreibweise.
Verwenden Sie bei Bedarf Ihre Lösung zu **M 3** als Hilfestellung.

1.	Elimination von x in (II): (I) mit (–1) multiplizieren und zu (II) addieren	$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2{,}5 & 210 \\ 0 & -1 & 2{,}5 & 80 \\ 2 & 0{,}5 & -2{,}5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \end{array} \end{array}$
2.	Elimination von x in (III): (I) mit (–1) multiplizieren und zu (III) addieren	$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2{,}5 & 210 \\ 0 & -1 & 2{,}5 & 80 \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \end{array}$
3.	Elimination von y in (V): (IV) mit (–0,5) multiplizieren und zu (V) addieren. Damit ist das LGS in Dreiecksform.	$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2{,}5 & 210 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{VI} \end{array} \end{array}$
3.	Den Wert von z bestimmen. Dazu (VI) durch (–6,25) teilen. Danach kann man den Wert von z in der letzten Zeile ablesen. Diese Zeile bedeutet übersetzt in die „normale" Schreibweise: $0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=40 \Leftrightarrow z=40.$	$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{VII} \end{array} \end{array}$
4.	Den Wert von y bestimmen. Dazu das Ergebnis für z in (IV) einsetzen. Diese Gleichung lässt sich aus der Matrixschreibweise in folgende Gleichung übersetzen: $0\cdot x+(-1)\cdot y+2{,}5\cdot z=80$	
5.	Den Wert von x bestimmen. Dazu das Ergebnis für z und y in (I) einsetzen.	
6.	Lösungsmenge aufschreiben	

M 7 Sicherung: Klapptest Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

https://raabe.click/video-IIB28-M7

Knicken Sie das Blatt an der dicken Linie, sodass Sie die Lösungen nicht sehen können. Notieren Sie die Lösungsmenge (nicht die Rechenwege) jeweils neben der Aufgabe. Nach der Bearbeitung der Aufgaben können Sie dann Ihre Ergebnisse kontrollieren und die Anzahl der richtigen Ergebnisse zählen.

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungssysteme.

Aufgabe	Meine Lösung	Lösung zur Kontrolle	Richtig
$\left\lvert\begin{array}{l} x+y-z=17 \\ x-y+z=13 \\ -x+y+z=7 \end{array}\right\rvert$		$\mathbb{L}=\{([illegible] 10)\}$	
$\left\lvert\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+2y+4z=10 \\ x+3y+9z=17 \end{array}\right\rvert$		$\mathbb{L}=\{(14,-8,3)\}$	
$\left\lvert\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=7 \\ y+z=2 \end{array}\right\rvert$		$\mathbb{L}=\{(3,-2,4)\}$	
$\left\lvert\begin{array}{l} 6=x+y+z \\ 4=2x-y+z \\ 4=3x+2y-[illegible] \end{array}\right\rvert$		$\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{12}{7},\frac{13}{7},\frac{17}{7}\right)\right\}$	
$\left\lvert\begin{array}{l} 0=x+2y+3z \\ 17=2x-3y \\ [illegible]5=2x[illegible]y+z \end{array}\right\rvert$		$\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{203}{23},\frac{5}{23},-\frac{71}{23}\right)\right\}$	
Der Umfang des Dreiecks beträgt 12 cm. Die Länge von c beträgt 80 % der Länge von b. a und b zusammen sind doppelt so lang wie c. **Berechnen** Sie die Seitenlängen a, b und c. **Stellen** Sie dazu ein geeignetes lineares Gleichungssystem **auf**, und **lösen** Sie es.		$\left\lvert\begin{array}{c} a+b+c=12 \\ c=0{,}8b \\ a+b=2c \end{array}\right\rvert$ $\mathbb{L}=\{(3\mid 5\mid 4)\}$	

Anzahl der richtigen Lösungen: ________ / 6

Wenn Sie drei oder weniger Aufgaben richtig bearbeitet haben, dann sollten Sie sich die Beispielaufgabe und das Lernvideo zum Gauß-Verfahren noch einmal in Ruhe anschauen. Bearbeiten Sie anschließend die falsch gelösten Aufgaben erneut. Wie viele Aufgaben haben Sie jetzt richtig? **Anzahl der richtigen Lösungen: ________ / 6**

M 10 Vertiefung: Anzahl Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Nicht immer ist ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es kann auch vorkommen, dass ein Gleichungssystem keine oder sogar unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 1

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Verfahrens. **Geben** Sie eine Vermutung für die Lösungsmenge **an** und **begründen** Sie Ihre Antwort.

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge und Begründung:

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Verfahrens. **Geben** Sie eine Vermutung für die Lösungsmenge **an** und **begründen** Sie Ihre Antwort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge und Begründung:

Tipp 1: Es ist bei beiden Aufgaben nur eine Äquivalenzumformung notwendig, um die Lösbarkeit des Gleichungssystems zu entscheiden!

Tipp 2: Verwenden Sie bei Bedarf das Erklärvideo https://raabe.click/video-IIB28-M10

Aufgabe 3

Vervollständigen Sie den folgenden Merksatz:

Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Wenn in einer Zeile des LGS alle Spalten, bis auf die letzte, den Wert ______ haben, so hat das Gleichungssystem _______________ Lösung. Enthält eine Zeile nach einer Umformung ausschließlich den Wert _________, so hat das Gleichungssystem ____________________________ Lösungen.