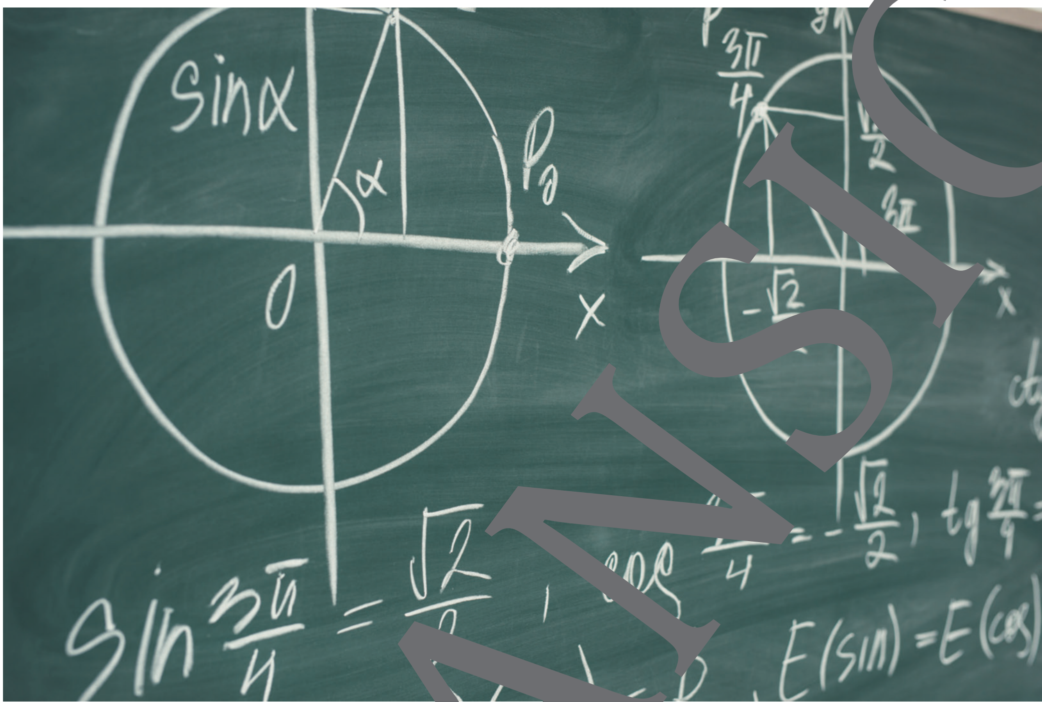
I.D.67

Geometrie

Trigonometrie am Einheitskreis – Sinus- und Kosinusfunktion anschaulich herleiten

Diana Hauser



© EtiAmmos/iStock/Getty Images Plus

In dieser Einheit wird die trigonometrische Berechnung von Winkeln zwischen 0° und 180° an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken mithilfe des Einheitskreises erweitert und somit auch für Winkel über 180° definiert. Die Vorlage zu einer selbst gebastelte Drehscheibe, die die Bewegung eines Punktes auf dem Einheitskreis simuliert, ermöglicht enaktives Lernen. Die Lernenden leiten sich so anschaulich über Symmetriebetrachtungen und Verschiebung die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion her. *LearningApps*, Erklärvideos und Verlinkungen zu *GeoGebra*-Dateien fördern die selbstständige Bearbeitung.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe:	10
Dauer:	5 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Sinus, Kosinus, Einheitskreis, Sinusfunktion, Kosinusfunktion
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4)

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Mb: Merkblatt
Planung für 5 Stunden

Einstieg

M 1 (Ab)	Sinus und Kosinus in Dreiecken

Erarbeitung

M 2 (Ab)	Sinus am Einheitskreis
M 3 (Ab)	Kosinus am Einheitskreis
M 4 (Ab)	Sinusfunktion
M 5 (Ab)	Kosinusfunktion

Ergebnissicherung

M 6 (Mb)	Sinus- und Kosinusfunktion

Übungen

M 7 (Ab)	Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus

Test

M 8 (Ab)	Sinus und Kosinus – Alles verstanden?

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.

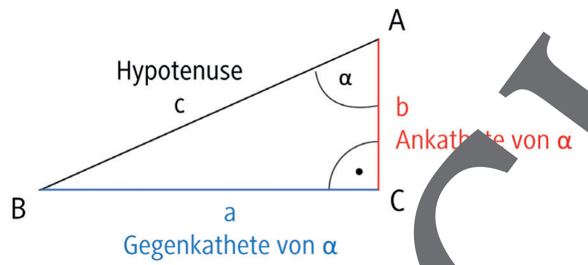
Minimalplan
Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 (Ab)	Sinus und Kosinus in Dreiecken
M 2 (Ab)	Sinus am Einheitskreis
M 3 (Ab)	Kosinus am Einheitskreis
M 4 (Ab)	Sinusfunktion
M 7 (Ab)	Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus: Aufgaben 1, 2, 3, 4a

Einstieg: Sinus und Kosinus in Dreiecken

M 1

1. Winkel zwischen 0° und 90°

WISSEN	
Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ Im rechtwinkligen Dreieck gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$	

https://raabe.click/ma-Trigonometrie-2

Typische Aufgaben

Aufgabe 1

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a = 4,5 cm und b = 3,6 cm lang.

a) **Berechne** die Länge der Hypotenuse c.

b) **Berechne** die Winkel α und β.

Runde auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 2

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse [illegible] Winkel beträgt $\alpha = 30°$.

a) **Berechne** die Länge der Seite a.

b) **Berechne** die Länge der Seite b.

Runde auf zwei Nachkommastellen.

Sinus- und Kosinuswerte für Winkel zwischen 0° und 90°

Aufgabe 3

a) **Fülle** die Tabelle **aus**. **Runde** auf zwei Nachkommastellen.

α	[illegible]	10°	30°	45°	60°	80°	90°
$\sin(\alpha)$							
$\cos(\alpha)$							

b) **Beschreibe** kurz, was dir an den Werten auffällt.

Grundlagen üben mit diesen *LearningApps*

https://learningapps.org/watch?v=puds5gxoc22

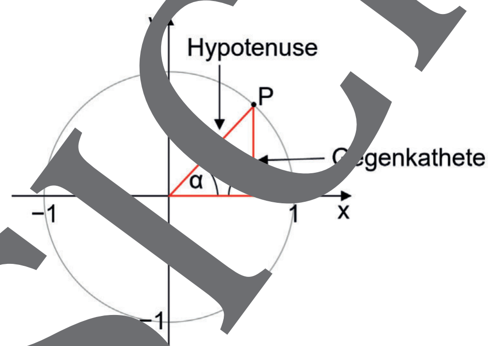
M 2 Erarbeitung I: Sinus am Einheitskreis

Ziel: Sinuswerte für beliebige Winkel

Über die Berechnung in allgemeinen Dreiecken konnten Sinus- und Kosinuswerte am Halbkreis, also von 0° bis 180°, berechnet werden. Diese Anschauung soll nun auf den Vollkreis, also 0° bis 360°, erweitert werden. Zur Vereinfachung werden alle Berechnungen am Einheitskreis gezeigt. Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und mit Radius 1.

Du kennst bereits die Formel $\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

Für das rechtwinklige Dreieck im Einheitskreis ergibt sich:



Grafik: Diana Hauser

Löst die Aufgaben 1 bis 3 zu zweit.

Aufgabe 1

Fülle die Lücken.

a) Eine Ecke des rechtwinkligen Dreiecks liegt im ________________, eine Ecke (P) liegt auf dem ________________.

b) Die Hypotenuse hat die Länge ____, die Gegenkathete entspricht der _______-Koordinate.

c) Es gilt: $\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}=\frac{\square}{\square} \Rightarrow y=\square$

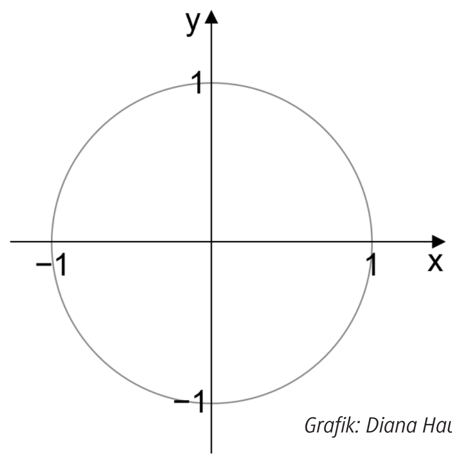
Im Einheitskreis gibt also die y-Koordinate des Punktes P den Sinuswert an. Nun lassen wir den Punkt P auf dem Einheitskreis wandern und betrachten das Vorzeichen des Sinuswerts.

Aufgabe 2

a) **Fülle** die Vorzeichentabelle für den Sinuswert **aus**.

b) **Zeichne** für jeden Quadranten ein passendes Beispiel im Einheitskreis.

P im II. Quadranten Vorzeichen sin:	**P im I. Quadranten** Vorzeichen sin:
P im III. Quadranten Vorzeichen sin:	**P im IV. Quadranten** Vorzeichen sin:



Grafik: Diana Hauser

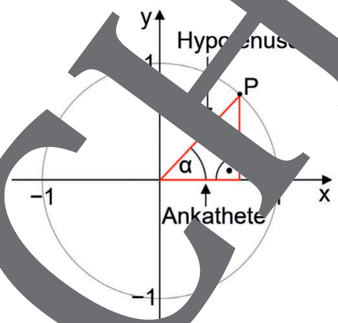
M 3 Erarbeitung II: Kosinus am Einheitskreis

Ziel: Kosinuswerte für beliebige Winkel

Die Vorgehensweise ist analog zum Sinus am Einheitskreis, nur dass statt des Sinus und damit die Gegenkathete hier nun der Kosinus und damit die Ankathete betrachtet wird.
Aus der Mittelstufe kennen Sie bereits die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Für das rechtwinklige Dreieck im Einheitskreis ergibt sich:



Grafik: Diana Hauser

Löst die Aufgaben 1 bis 3 zu zweit.

Aufgabe 1

Fülle die Lücken.

a) Die Hypotenuse hat die Länge ______. Die Ankathete entspricht der ______-Koordinate.

b) Es gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\square}{\square} = \ldots x = \boxed{}$

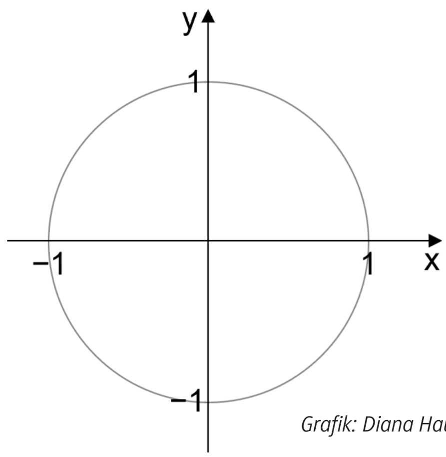
Im Einheitskreis gibt also die x-Koordinate den Kosinuswert an. Nun lassen wir den Punkt P auf dem Einheitskreis wandern und betrachten das Vorzeichen des Sinuswerts.

Aufgabe 2

a) **Fülle** die Vorzeichentabelle für den Kosinuswert **aus**.

b) **Zeichne** für jeden Quadranten ein passendes Beispiel im Einheitskreis.

P im II. Quadranten Vorzeichen cos:	**P im I. Quadranten** Vorzeichen cos:
P im III. Quadranten Vorzeichen cos:	**P im IV. Quadranten** Vorzeichen cos:



Grafik: Diana Hauser

M 4a Erarbeitung III: Sinusfunktion

Ziel: Herleitung des Graphen der Sinusfunktion

Der Sinus ordnet jedem Winkel α die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu. Hinter „dem Sinus" steckt eine Funktion, die sogenannte Sinusfunktion. Ihr Graph kann über den Einheitskreis und das Abtragen von Punkten in ein Koordinatensystem „konstruiert" werden.

Aufgabe 1

Schneide die beiden Vorlagen aus **M 4b** entlang der gestrichelten Linien aus und **stelle** damit eine Drehscheibe her. Das Riesenrad (Kreis an dem die Gondeln befestigt sind) stellt den Einheitskreis dar. **Gehe** für das Zeichnen des Graphen der Sinusfunktion wie folgt **vor:**

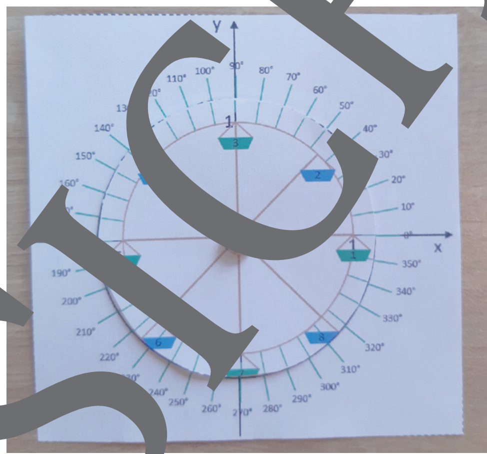


Foto: Diana Hauser

1. **Stelle dir vor**, du säßest in Gondel 1, die im Startpunkt P(1|0) befestigt ist.
2. **Lege** die Drehscheibe so neben das Koordinatensystem, dass die x-Achse auf derselben Höhe liegt wie die α-Achse.
3. **Achte** beim weiteren Vorgehen immer auf die Lage des Aufhängepunktes deiner Gondel.
4. Der erste Punkt, den du in das Koordinatensystem übertragen kannst, ist der Punkt (0°|0), denn der Winkel ist 0° und der zugehörige y-Wert 0.
5. **Drehe** nun deine Gondel auf 10°. Der Aufhängepunkt der Gondel entspricht dem y-Wert des neuen Punkts mit α = 10°. **Denke** dir eine waagrechte Linie von dem Aufhängepunkt bis zur Vertikalen durch 10° im Koordinatensystem. Der Schnittpunkt ist ein weiterer Punkt des Graphen der Sinusfunktion.
6. **Verfahre** wie in Schritt 5 für alle Winkelwerte der Drehscheibe.
7. **Verbinde** die Punkte im Koordinatensystem.

a) **Mache** einen Durchlauf mit dem Riesenrad (0° bis 360°).

Grafik: Diana Hauser

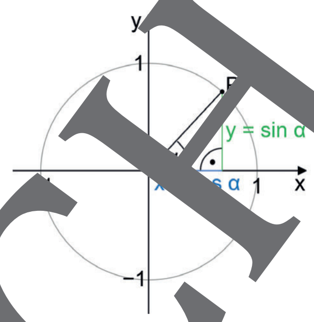
M 6 Ergebnissicherung: Sinus- und Kosinusfunktion

https://raabe.click/ma-Trigonometrie-3

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Sinus ordnet jedem Winkel α die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.

Der Kosinus ordnet jedem Winkel α die x-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.



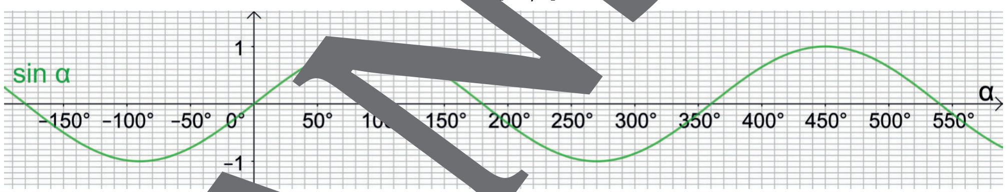
Grafik: Diana Hauser

Wichtige Beziehungen:

$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$	$\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$
$\sin(\alpha) = -\sin(360° - \alpha)$	$\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$
$\sin(\alpha) = -\sin(180° + \alpha)$	$\cos(\alpha) = -\cos(180° + \alpha)$
$\sin(\alpha) = \sin(360° + \alpha)$	$\cos(\alpha) = \cos(360° + \alpha)$

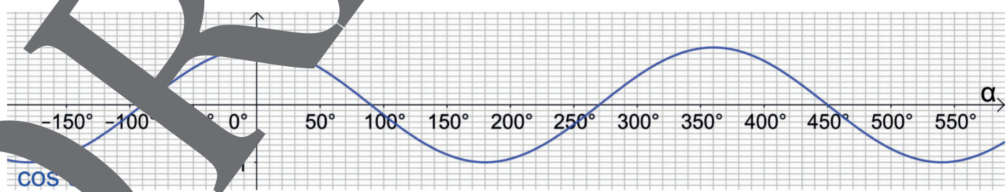
Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion, die ihren Verlauf alle 360° wiederholt. Die Funktionswerte nehmen nur Werte im Bereich [−1;1] an.



Kosinusfunktion

Die Kosinusfunktion ist eine periodische Funktion. Sie ist die um 90° nach links verschobene Sinusfunktion.



Man spricht bei den beiden Funktionen auch von Winkelfunktionen.

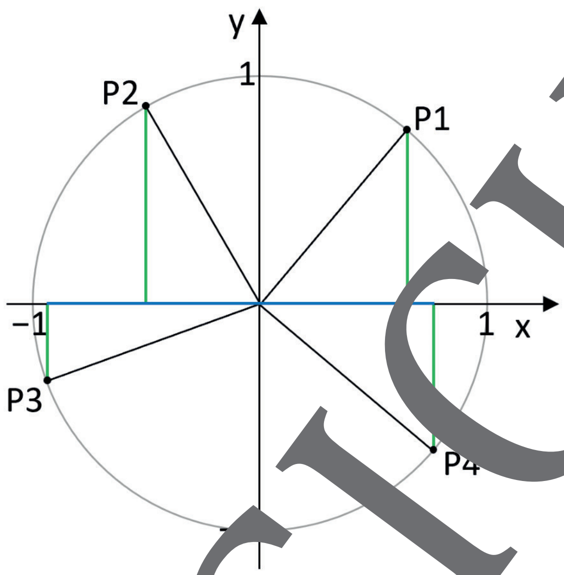
Übung: Vermischte Aufgaben zu Sinus und Kosinus

M 7

Aufgabe 1

Der Einheitskreis ist im Maßstab 3:1 gezeichnet.

a) **Lies** die Werte für Sinus und Kosinus <u>am Einheitskreis ab</u>.
Runde dein Ergebnis auf 2 Nachkommastellen.



Grafik: D[illegible]na Hauser

sin(50°) ≈ ________________

cos(50°) ≈ ________________

sin(200°) ≈ ________________

cos(200°) ≈ ________________

sin(130°) ≈ ________________

cos(130°) ≈ ________________

sin(320°) ≈ ________________

cos(320°) ≈ ________________

b) **Rechne** <u>mit dem Taschenrechner</u> die exakten Werte aus. [illegible]**unde** auch [illegible]eder auf 2 Nachkommastellen und **vergleiche** sie mit den abgelesenen Werten [illegible]us Teilaufgabe a).
Beurteile so deine eigene Genauigkeit.

Aufgabe 2

Entscheide anhand des Einheitskreise[illegible]elcher Wert plausibe[illegible].

a) cos(45°) ≈ ☐ 0,1 ☐ −0,5 ☐ 0,[illegible] ☐ [illegible]

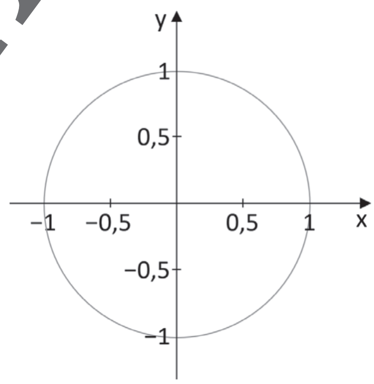
b) sin(110°) ≈ ☐ −0,3 ☐ 0,9 ☐ 0,[illegible] ☐ −0,5

c) sin(245°) ≈ ☐ −0,1 ☐ [illegible] ☐ −0,9 ☐ 1

d) cos(180°) ≈ ☐ 0 ☐ −0,5 ☐ 0,5 ☐ −1

e) cos(300°) ≈ ☐ −0,[illegible] ☐ 0,[illegible] ☐ 1 ☐ 0,1

f) sin(20°) ≈ ☐ 0,3 ☐ 0,5 ☐ 0,8 ☐ −0,2



Grafik: Diana Hauser

Aufgabe [illegible]

Kreu[illegible]e ric[illegible] oder falsch pass[illegible]nd **an**.

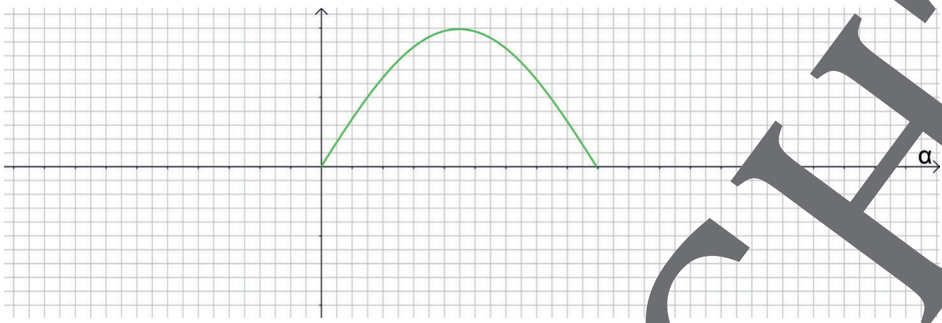
	richtig	falsch
sin(30°) = [illegible]in(150°)		
sin(10[illegible]) [illegible](360°)		
sin(110°) = sin(470°)		
sin(45°) = −sin(225°)		

	richtig	falsch
cos(50°) = cos(330°)		
cos(90°) = cos(180°)		
cos(180°) = −cos(360°)		
cos(45°) = −cos(225°)		

https://learningapps.org/watch?v=ppnjo4evj22

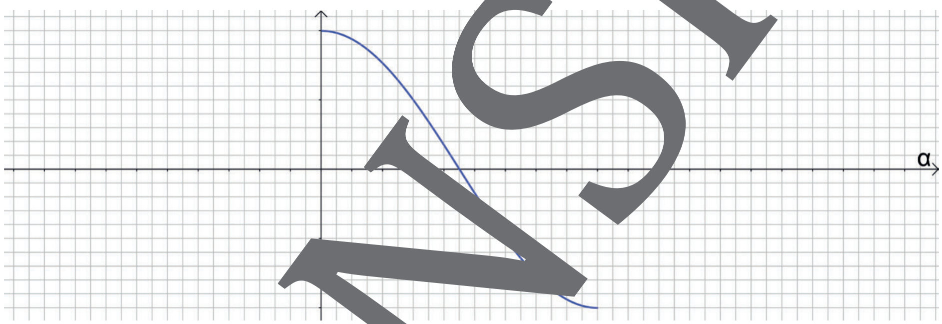
Aufgabe 4

a) **Beschrifte** die Achsen und **vervollständige** den Graphen der Sinusfunktion im Intervall [–90°; 360°].



Grafik: Diana Hauser

b) **Beschrifte** die Achsen und **vervollständige** den Graphen der Kosinusfunktion im Intervall [–180°; 360°].



Grafik: Diana Hauser

Aufgabe 5

Entscheide, ob die Aussagen richtig oder falsch sind.

https://learningapps.org/watch?v=ps1uj1qr522

	richtig	falsch
Die Sinusfunktion nimmt nur Werte zwischen –2 und 1 an.		
Der Graph der Sinusfunktion verläuft linear.		
Die Kosinusfunktion nimmt nur Werte zwischen –1 und 1 an.		
Die Sinusfunktion ist eine nach rechts verschobene Kosinusfunktion.		
Die Sinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		
Die Kosinusfunktion hat die Nullstellen $\alpha = 0$ und $\alpha = 180°$.		
Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		
Die Kosinusfunktion ist eine nach oben verschobene Sinusfunktion.		
Die Sinusfunktion hat die Nullstellen $\alpha = 0$ und $\alpha = 180°$.		
Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		
Die Kosinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		
Der Graph der Sinusfunktion verläuft periodisch mit der Periode 360°.		