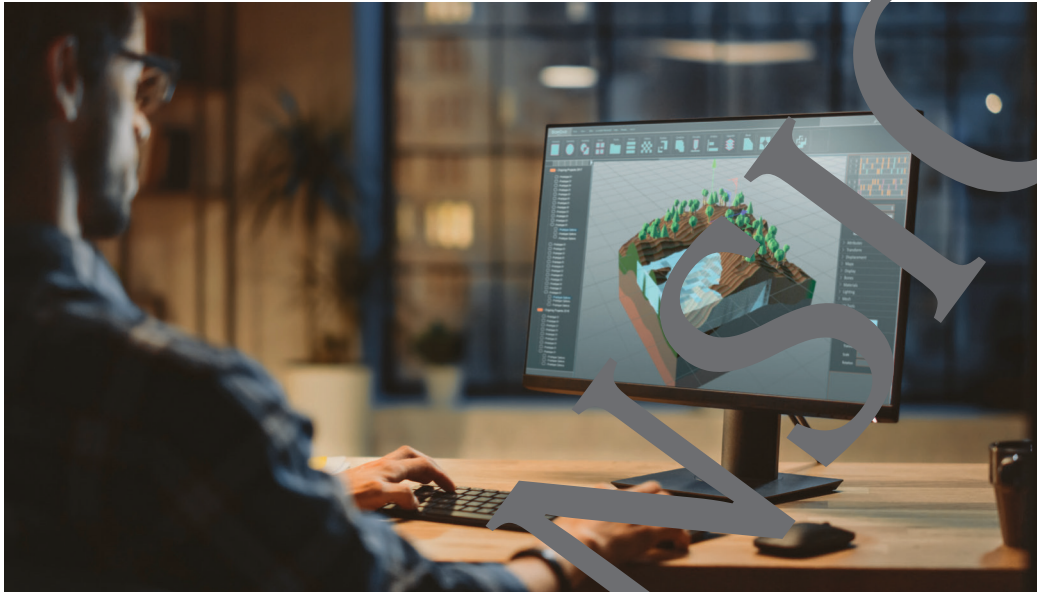


## II.B.26

### Lineare Algebra und analytische Geometrie

# Spiegelung von Geraden – Entwicklung von Computerspielen mit linearer Algebra

Ein Beitrag von Johann-Georg Vogelhuber



© gordenkoff/iStock/Getty Images Plus

Die Entwicklung von modernen Computerspielen ist ohne fortgeschrittene Konzepte der linearen Algebra undenkbar. Ausgehend von unterschiedlichen Lern- und Förderungssituationen im Bereich der Spieleentwicklung erarbeitet Ihre Klasse die Spiegelung einer Geraden an einer Ebene. Das Material bietet so einen motivierenden Anwendungsbezug für die Lernenden. Überdies bieten verlinkte Erklärungsvideos und ausgearbeitete *LearningSnacks* Hilfen und Tipps und unterstützen Sie dadurch beim differenzierten Unterrichten.

#### KOMPETENZEN

- Klassenstufe:** Sek II
- Dauer:** 7 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)
- Inhalt:** Parameterdarstellung von Ebenen, Schnittpunktberechnung von Gerade und Ebene, Abstandsberechnung Punkt und Ebene
- Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3)
- Zusatzmaterialien:** Einstiegsvideo

LEARNING  
*Snacks*

## Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt

Planung für 6-7 Stunden

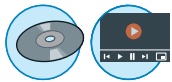
### Einstieg/Erarbeitung

**Thema:** Grundkonzept der Lotgeraden

- M 1** (Ab) Ziel erfasst? – Lagebeziehung von Gerade und Ebene  
**M 2** (Ab) Hilfematerial: Ebenengleichung aufstellen und Schnittpunkt berechnen  
**M 3** (Ab) Alle Systeme korrekt? – Abstand von Punkt und Ebene  
**M 4** (Ab) Hilfematerial: Abstand von Punkt und Ebene  
**M 5** (Ab) Hilfematerial: Abstand von Punkt und Ebene

**Thema:** Spiegelung von Punkt und Gerade

- M 6** (Ab) Spiegelung eines Punktes an einer Ebene  
**M 7** (Ab) Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden  
**M 8** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“  
**M 9** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“



CD 84

### Ergebnissicherung

**Thema:** Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^3$

- M 10** (Ab) Wissensspeicher: Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^3$

### Übung und Lernerfolgskontrolle

**Thema:** Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^3$

- M 11** (Ab) Übungsaufgabe zur Wiederholung und Vertiefung  
**M 12** (Ab) Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^3$

### Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.

## Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

- M 6** (Ab) Spiegelung eines Punktes an einer Ebene
- M 7** (Ab) Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden
- M 8** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“
- M 9** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“

## Erklärung zu den Symbolen

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgearbeitet wird.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	erweitertes Niveau	
	Dieses Symbol markiert Wichtiges und Merksames.		
	Dieses Symbol markiert Tipps.		
	Dieses Symbol markiert Aufgaben, bei denen Videos angesehen werden.		
	Dieses Symbol markiert Aufgaben, bei denen die Lernenden einen Taschenrechner für die Lösung nutzen sollen.		
	Dieses Symbol markiert Zusatzmaterialien, die sich auf der mitgelieferten CD befinden.		

# M 1

## Ziel erfasst? – Lagebeziehung von Gerade und Ebene

Eine realitätsnahe Steuerung steigert den Spielspaß bei jedem Computerspiel. Deswegen soll für den neuesten Action-Kracher „Alpha Chase“ die Unterstützung für Pistolen und Gewehre als externe Controller entwickelt werden. Mit der Pistole zielen die Spielenden dann auf den Bildschirm und steuern so die Schüsse, die die Spielfigur mit ihrer Laser-Kanone abgibt. Dazu muss berechnet werden, ob die Pistole auf den Bildschirm zielt und welcher Bildpunkt getroffen werden würde.



Für die Berechnung dieses Punktes benötigt die Entwicklungsabteilung Ihre Hilfe. Für diese ist zunächst die Berechnung für ein konkretes Beispiel wichtig und die damit verbundene Verantwortung der Fragen, die sich in diesem Zusammenhang ergeben. Die Mündung der Pistole befindet sich im

Punkt  $P(0|0|2)$  und zielt in Richtung des Vektors  $\begin{pmatrix} 2 \\ -0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ . Die Eckpunkte des Bildschirms be-

finden sich an den Koordinaten  $A(10|-10|5), B(10|-10|-5), C(12,5|10|-5), D(12,5|10|5)$ .

### Analyse

Welche Frage muss beantwortet werden?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Wie kann man die Schussrichtung und die Position der Pistole modellieren?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Wie lässt sich der Bildschirm mit Hilfe von Vektoren beschreiben?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Wie kann man den Treffpunkt berechnen, auf den die Pistole zielt?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



LearningSnack



<https://raabe.click/LearningSnack-Gerade-Ebene>

Aufgabe

Führen Sie die notwendigen Berechnungen **aus**, um die Frage zu beantworten. **Verwenden** Sie dazu die Ergebnisse der anderen drei Analysefragen.

Bei Bedarf können Sie das Hilfematerial (**M 2**) verwenden und Ihre Lösung mithilfe des verlinkten LearningSnacks überprüfen. Dazu entweder den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den Link **aufzurufen**.

## Hilfematerial: Ebenengleichung aufstellen und Schnittpunkt berechnen

M 2

### Beispielaufgabe: Ebenengleichung aus drei Punkten aufstellen

Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die drei Punkte  $A(2 \mid 1 \mid 3)$ ,  $B(-2 \mid -1 \mid 0)$  und  $C(5 \mid 6 \mid 1)$  liegen? **Stellen** Sie die entsprechende Ebenengleichung **auf**.

### Detaillierter Lösungsweg

**Vervollständigen** Sie die Tabelle, indem Sie die angegebenen Rechenschritte durchführen. Bei Bedarf zur Hilfestellung können Sie sich das nebenstehende Erklärvideo anschauen. Dazu entweder den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den Link **aufrufen**.

Um die Ebenengleichung  $E: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$  aufzustellen, müssen ein Stützvektor  $\vec{u}$  sowie die Richtungsvektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  **bestimmt** werden.



<https://raabe.click/Parameterform-Ebene>

Rechenschritt	Lösung
<b>Stützvektor <math>\vec{u}</math> wählen.</b> Dazu kann ein Ortsvektor zu einem der drei Punkte ausgewählt werden.	
<b>Richtungsvektoren <math>\vec{v}</math> und <math>\vec{w}</math> bestimmen.</b> Hier werden zwei unterschiedliche Vektoren zwischen jeweils zwei der drei Punkte benötigt.	
<b>Ebenengleichung notieren</b>	

**Beispielaufgabe: Schnittpunkt von Gerade und Ebene berechnen**

Gegeben sind die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und die Ebene  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Berechnen** Sie den Schnittpunkt von  $g$  und  $E$ .

**Detaillierter Lösungsweg**

**Vervollständigen** Sie die Tabelle, indem Sie die angegebenen Rechenschritte durchführen. Bei Bedarf zur Hilfestellung können Sie sich das nebenstehende Erklärvideo anschauen. Dazu entweder den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den Link **aufrufen**.



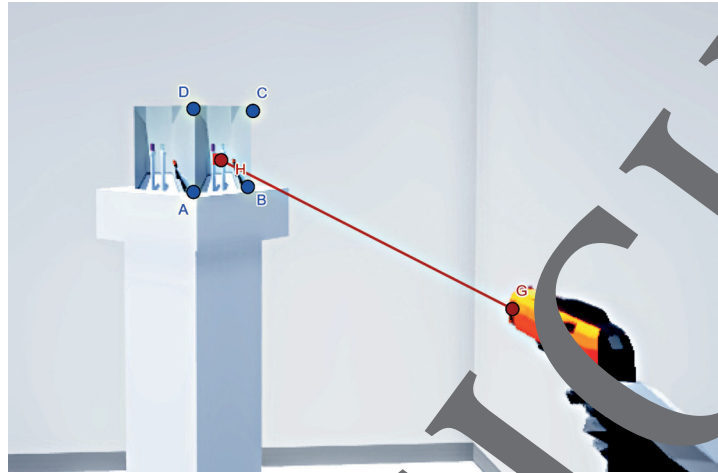
<https://raabe.click/Lage-Gerade-Ebene>

Rechenschritt	Lösung
$g$ und $E$ gleichsetzen	
Gleichungssystem notieren und lösen (CAS oder GTR)	
Lösung in einer der Gleichungen einsetzen, um die Koordinaten des Schnittpunktes zu berechnen	

## Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden

M 7

Für die Entwicklung des Spiels „Alpha Chase“ benötigt ihr Mitschüler Hilfe bei der Berechnung der Reflektion von Laserstrahlen an einer spiegelnden Oberfläche. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Beispielsituation. Der Laserstrahl wird vom Punkt  $G(0 \mid 0 \mid 0)$  zum Punkt  $H(-0,5 \mid 2 \mid 1)$  abgefeuert. Die Eckpunkte des spiegelnden Würfels sind die Punkte  $A(-0,75 \mid 1,75 \mid 0,5)$ ,  $B(0,25 \mid 2,75 \mid 0,5)$ ,  $C(0,25 \mid 2,75 \mid 2)$  und  $D(-0,25 \mid 1,75 \mid 2)$ .



Grafik: Johannes Georg Vogel

### Analyse

Welche Frage soll beantwortet werden?

Grid area for writing the question to be answered.

Welche Inhalte und Verfahren aus der vorherigen Stunde können hilfreich sein?

Grid area for listing helpful content and methods from the previous lesson.

Welche Rechenschritte sind für die Beantwortung der Frage notwendig?

Grid area for listing the necessary calculation steps.

### Arbeitsauftrag

**Bestimmen** Sie die Geradengleichung für den Laserstrahl, der vom spiegelnden Würfel reflektiert wird. **Folgen** Sie dabei den erarbeiteten Schritten. **Notieren** Sie für jeden Schritt zuerst, was zu tun ist und dann die konkrete Rechnung, sodass Sie eine übersichtliche Tabelle mit dem Rechenweg erhalten. **Verwenden** Sie bei Bedarf das verlinkte Hilfematerial **M 8** bzw. **M 9**.





## Tipps zu M 11

### Tipps (Allgemein)

Bei der Bearbeitung der Übungsaufgabe können Sie Ihre ausgefüllten Wissensblätter zur Hilfe nehmen. Bei Bedarf können Sie auch noch einmal die verlinkten Erklärvideos von den vorherigen Arbeitsblättern zur Hilfe nehmen.

### Tipps zu Aufgabe 1

Um die Ebenengleichung aufzustellen, können Sie beispielsweise den Vektor  $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  als

Stützvektor und  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sowie  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  als Richtungsvektoren verwenden.

### Tipps zu Aufgabe 2

Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 1. Der Schnittpunkt von Hilfsgerade und Ebene haben Sie die meiste Arbeit bereits erledigt. Der Schnittpunkt lautet  $S(5 \mid 1,5 \mid 0,5)$ .

### Tipps zu Aufgabe 3

Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2. Der Schnittpunkt von Lichtstrahl und Ebene ist bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Dies ist der Punkt B. Mit dem gespiegelten Punkt  $L'$  können Sie dann die Geradengleichung aufstellen.  $L'(2 \mid -2,5 \mid -5,5)$

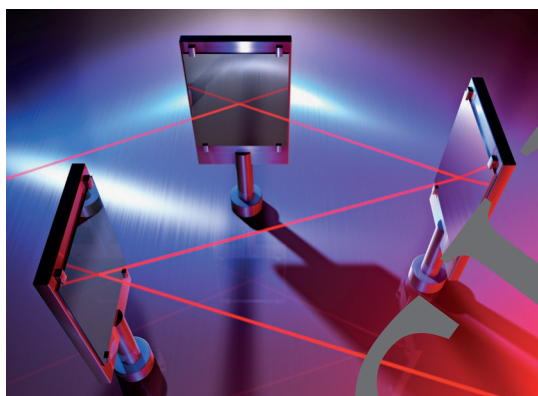


## Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

M 12

### Situationsbeschreibung

In ein Computerspiel soll ein Puzzle integriert werden, bei dem ein Laserstrahl mithilfe von verschiedenen Spiegeln zu einem Zielpunkt gelenkt werden soll. Zur Überprüfung der implementierten Berechnungen ist es notwendig, eine Spielsituation zu berechnen.



#### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Ebene, in der einer der Spiegel liegt, wird durch die drei Punkte  $A(2|1|0)$ ,  $B(0|-1|0)$  und  $C(0|-1|1)$  beschrieben. **Zeigen** Sie, dass die Ebenengleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Ebene durch die Punkte A, B und C beschreibt.

#### Aufgabe 2 (2 Punkte)

**Überprüfen** Sie rechnerisch, ob der Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor für die Ebene E ist.

#### Aufgabe 3 (4 Punkte)

**Stellen** Sie eine Geradengleichung für die Gerade  $h$  auf, die senkrecht zu E durch den Punkt  $L(0|-4|2)$  verläuft und **berechnen** Sie den Schnittpunkt von  $h$  und E.

*Hinweis: Falls Sie Probleme haben, den Schnittpunkt  $S$  von  $h$  und E zu berechnen, so rechnen Sie im Folgenden mit  $S(-1,5|-2,5|2)$  weiter.*

#### Aufgabe 4 (2 Punkte)

**Berechnen** Sie den Abstand des Punktes L zur Ebene E.

#### Aufgabe 5 (4 Punkte)

**Bestimmen** Sie die Koordinaten des Punktes  $L'$ , den man durch Spiegelung des Punktes L an der Ebene E erhält.

*Hinweis: Falls Sie Probleme haben, den Punkt  $L'$  zu berechnen, so rechnen Sie im Folgenden mit  $L'(-1|-1|2)$  weiter.*

#### Aufgabe 6 (5 Punkte)

**Stellen** Sie die Geradengleichung  $g$  für den Lichtstrahl durch die Punkte L und C (siehe Aufgabe 1) auf und **bestimmen** Sie die Gleichung der Geraden  $g'$ , die man durch Spiegelung von  $g$  an E erhält.

# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 4.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Sichere Zahlung** per Rechnung,  
PayPal & Kreditkarte



**Exklusive Vorteile für Abonnent\*innen**

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



**Käuferschutz** mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**