II.A.35

Analysis

Wachstumsvorgänge – lineare, exponentielle, beschränkte und logistische Prozesse verstehen

Ein Beitrag von Florian Borges

© weerapatkiatdumrong/iStock/Getty Images Plus

In der Natur und vielen anderen Lebensbereichen gibt es Wachstumsvorgänge, die in mathematische Modelle übersetzt werden können. In diesem Beitrag werden die wichtigsten Wachstumsmodelle, lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum, gegenübergestellt.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12
Dauer: [illegible] Unterrichtsstunden
Inhalt: Lineares, exponentielles, beschränktes, logistisches Wachstum
Kompetenzen: mathematisch modellieren (K3); mathematische Darstellungen verwenden (K4); mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Bi = Bildimpuls; Lek = Lernerfolgskontrolle

Einstieg

M 1 (Bi) Wachstum – welches mathematische Modell passt?

Erarbeitung

M 2 (Ab) Lineares Wachstum
M 3 (Ab) Exponentielles Wachstum
M 4 (Ab) Beschränktes Wachstum
M 5 (Ab) Logistisches Wachstum
M 6 (Ab) Vergiftetes Wachstum
M 7 (Ab) Kontinuierliche Verzinsung
M 8 (Ab) Ergänzung: Feste Rate

Übung

M 9 (Lek) Fit für de[illegible]test?

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.
	Dieses Symbol markiert alternative Möglichkeiten.

Wachstum – welches mathematische Modell passt? M 1

© DaLiu/iStock/Getty Images Plus; © owngarden/iStock/Getty Images Plus; © colourbox; © swalls/E+; © NNehring/iStock/Getty Images Plus; © SerhiiBobyk/iStock/Getty Images Plus; © RichVintage/E+

M 4

https://raabe.click/ma-beschränkt

Beschränktes Wachstum

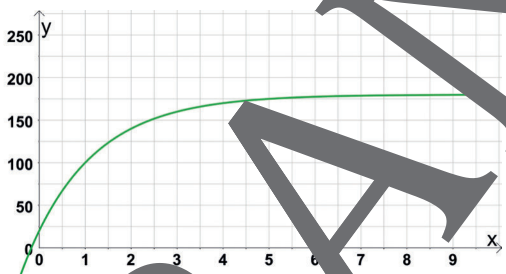
Heizt man den Backofen von Raumtemperatur B(0) = 20 °C auf 180 °C ein, dann steigt die Tempe- tur B(t) zunächst stärker an und nähert sich schließlich asymptotisch dem Zielwert S = 1 . Anders als das Geld auf dem Bankkonto wird sie aber nicht beliebig weiterwachsen. Je m hr Heizbedarf noch vorhanden ist (man nennt das „Sättigungsmanko“ M(t) = S – B(t)), umso sta wächst die Temperatur. Das Sättigungsmanko nimmt exponentiell ab, es gilt also: $M(t) = S - B(t) = a$
Ganz ähnlich ist es beim beschränkten Zerfall. Dabei nähert sich dann de Wert jedoc von der Sättigungsschranke S.
Für die Ableitung gilt mit Kettenregel $B'(t) = a \cdot \ln b \cdot b^{-t}$
Schnelleres Wachstum gibt es bei größerem b!

Beschränktes Wachstum
$B(t) = S - a \cdot b^{-t}$ mit $a = S - B(0)$ und $b > 1$

Beschränkter Z fall
$B(t) = S + a \cdot b^{-t}$ m $= S + B(0)$

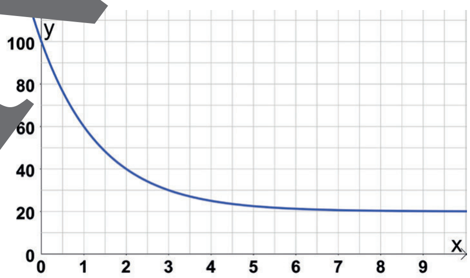
© owngarden/iStock/Getty Images Plus

© lourbox



$f(x)$ $180 - 160 \cdot 2$

(z. B. Ba en)



$g(x) = 20 + 80 \cdot 2^{-x}$

(z. B. auf 20 Grad abkühlender Tee)

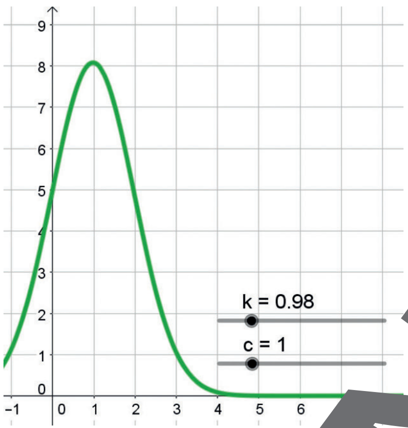
1

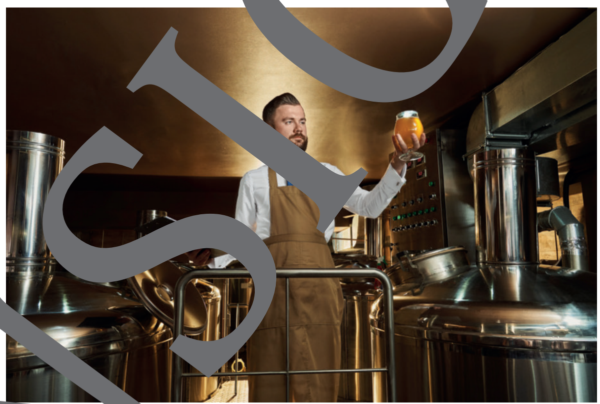
Eine Fir öchte ei neues Gerät einführen und startet in einem Dorf mit 2000 Menschen einen Testverkauf. ch einer Woche sind 353 Geräte verkauft.
Berechnen Si wann 1000 bzw. 1900 Geräte verkauft sind, wenn man begrenztes Wachstum vor- setzt.

M 6

Vergiftetes Wachstum

Bei diesem Wachstumsmodell liegt ein geschlossenes System vor, in dem bei wachsendem Bestand auch Hemmstoffe (z. B. ein Gift) zunehmen, die letztlich den zeitabhängigen Wachstumsfaktor so beeinflussen, dass die Population gegen null strebt und damit ausstirbt.
Beispielsweise finden wir beim Bierbrauen vergiftetes Wachstum: Die Hefe wandelt die Zuckerlösung in Alkohol um, der sie wiederum nach und nach vergiftet. Auch Wasserflöhe in einem Aquarium ohne Frischwasserzufluss sterben nach anfänglicher Vermehrung an den eigenen Stoffwechselprodukten.
Die Funktionsgleichung lautet $B(t)=B(0)\cdot e^{kt-\frac{1}{2}ct^2}$ mit dem „wirksamen" Wachstumsfaktor (k – ct), darin ist k die artspezifische Wachstumskonstante und c die Vergiftungskonstante.
Beispielgraph:





…k/Getty Images Plus

Gelegentlich wird die Situation auch in sog. „Räuber-Beute"-Modellen durch zwei Gleichungen beschrieben, wobei die Population der Beute und das Gift dem Räuber entspricht.

Aufgabe 1

a) **Beschreiben** Sie die vergiftete Wachstumsfunktion B(t) mit Anfangsbestand B(0) = 2, zu bestimmendem Wachstumsfaktor k und ebenfalls gesuchtem Vergiftungsfaktor c so, dass der Maximalbestand zur Zeit t = 2 und der Wendepunkt (also der Moment stärkster Bestandsabnahme) zur Zeit t = 3 erreicht werden.

b) **Stellen** Sie die Lösungsfunktion sowie die ersten beiden Ableitungen B′(t) und B′′(t) mit GeoGebra **grafisch dar**.

c) **Lesen** Sie den Maximalbestand **ab**.

Aufgabe 2

Eine Grippeepidemie verläuft nach der Funktion $f(t)=100\cdot e^{0{,}6t-0{,}025t^2}$, wobei t die Anzahl der Wochen seit Startzeitpunkt t = 0 und f(t) die jeweilige Anzahl der Patienten darstellt.

a) **Berechnen** Sie die Zahl der Erkrankten zu Beginn der Epidemie und welchen Maximalwert die Anzahl der Erkrankten im Verlauf erreicht.

b) **Zeichnen** Sie den Graphen.

c) **Beschreiben** Sie die Situation an den Wendepunkten.

Fit für den Abschlusstest? M 9

Aufgabe 1

Anfangs 400 Erreger von Cholera werden in eine Nährlösung gegeben und vermehren sich *exponentiell* binnen 2 Stunden auf 32.000.

a) **Geben** Sie die Funktion an, die die Anzahl f(t) der Erreger nach der Zeit t beschreibt.

b) **Berechnen** Sie die Anzahl der Erreger nach 6 Stunden.

c) **Bestimmen** Sie die Wachstumsgeschwindigkeiten nach 1, 2 und 3 Stunden.

d) **Begründen** Sie, warum im Sachzusammenhang f(1000) kein sinnvolles Ergebnis liefern w[illegible]

Aufgabe 2

Eine Population wird durch die *logistische* Funktion $B(t)=\frac{20}{2+8\cdot 0{,}9^t}$ beschriebe[illegible]

Zeichnen Sie den Graphen und **bestimmen** Sie grafisch (etwa mit der „Z[illegible]om"-Fu[illegible]n von GeoGebra) den Zeitpunkt des größten Anstiegs.

Berechnen Sie die Größe der Anfangspopulation und die Sättigungsgrenze.

Aufgabe 3

Heißer Tee von zunächst 85 °C kühlt nach und nach ab auf Rau[illegible]temperat[illegible]C. Nach [illegible] Minuten hat er noch 60 °C.

Berechnen Sie, wann er gerade die angenehme Trinkte[illegible]eratur von 40 °C hat.

Aufgabe 4

Die (Parameter-)Funktion $f_1(x)=a\cdot e^{bx}$ bes[illegible] [illegible]achstum, die Funktion $f_2(x)=a\cdot e^{bx-cx^2}$ dagegen vergiftetes Wachstum.

a) **Zeigen** Sie, dass beim exponentiellen Wachstum Fu[illegible]tion und Änderungsrate proportional zueinander sind (also $\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}=$ cons[illegible].

b) **Zeigen** Sie, dass beim vergifteten Wach[illegible]tum di[illegible] Geb[illegible]rate g wie bei exponentiellem Wachstum konstant ist, die Sterberate s aber pro[illegible]ortional mit der Zeit, also $\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}=g-s\cdot t$ wächst.

Aufgabe 5

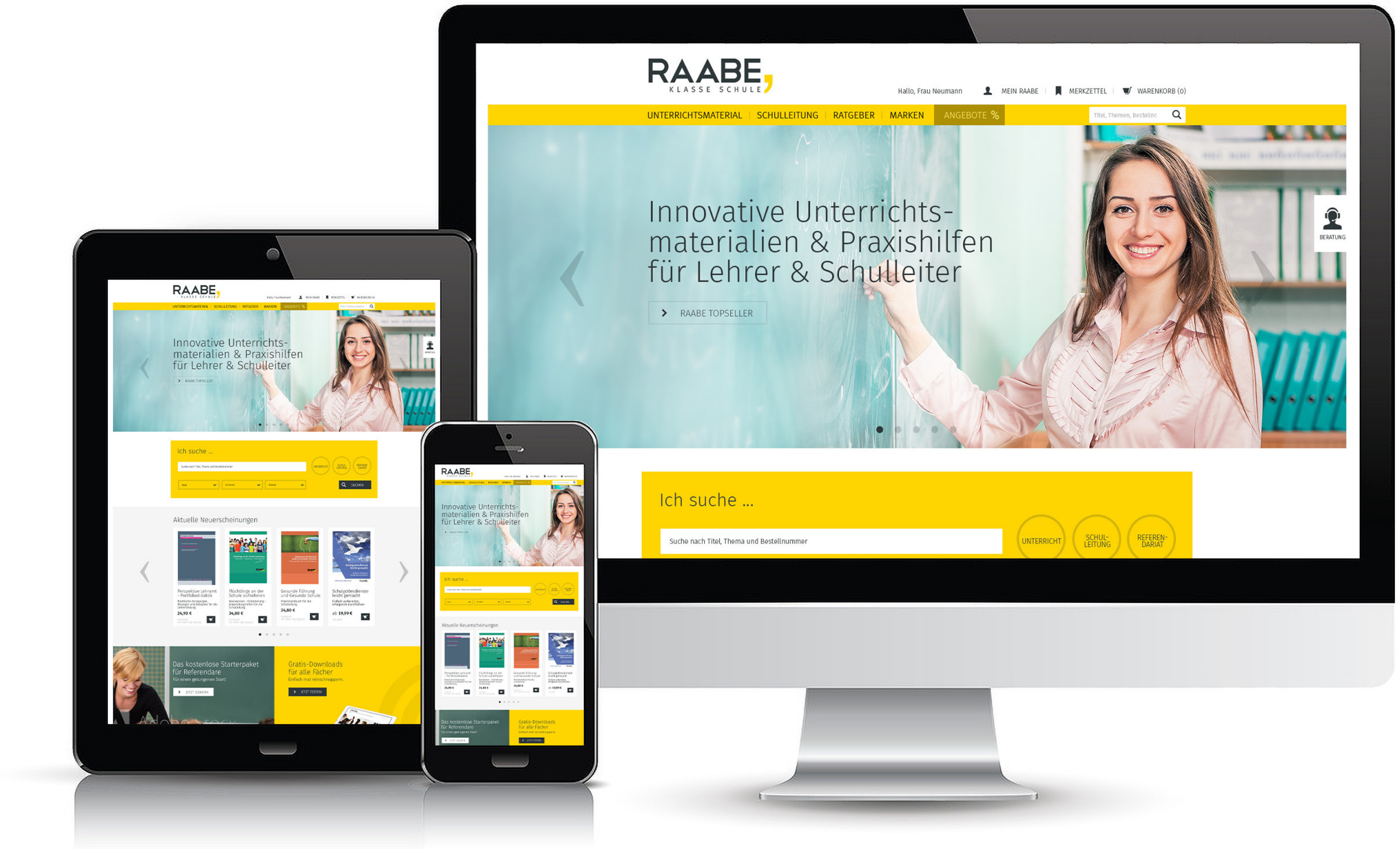
Krösus leiht Armdran 500[illegible]d b[illegible]etet zwei Alternativen zur Rückzahlung an: 20 mtl. Raten je 30 € oder 30 Raten je 20 €. **Verglei[illegible]** Sie qualitativ die Tilgungspläne und **beraten** Sie Armdran!

Aufgabe 6

Hein wirft [illegible]0 Jahre lang mo[illegible]lich 10 € in sein Sparschwein, Justus zahlt dagegen 10 Jahre lang mona[illegible]tlich [illegible] auf sein Sparko[illegible]to (und lässt jeweils gleich Zinsen gutschreiben!), das jährlich 6 % Zin[illegible] bringt. [illegible]n Sie mit [illegible]cel einen Sparplan für Justus an und **vergleichen** Sie sein Schlusskapital [illegible]it dem von [illegible]

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de