

II.C.18

Stochastik

Was sagt das Ergebnis eines medizinischen Tests aus? – Fehlerwahrscheinlichkeiten

Prof. Dr. Andreas Pfeifer, Groß-Zimmern

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



© RAABE 2020

© g1axia/E+/Getty Images Plus

Ein Antikörpertest kann im Blut eines Menschen nachweisen, ob dieser bereits eine SARS-CoV-2-Infektion hatte oder nicht. Aber die Fehlerquote eines solchen Tests ist immer noch sehr hoch. Nun kommt per Eizulassung ein Test auf den Markt, der fast 100-prozentige Sicherheit verspricht. Anhand dieses Beispiels sollen sich Ihre Schüler mit Fehlerwahrscheinlichkeiten bei medizinischen Tests auseinandersetzen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11–13 (G9)

Dauer: 4–6 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Kommunizieren (K6)

Thematische Bereiche: Bewertung von medizinischen Tests mithilfe von Wahrscheinlichkeiten, Sensitivität, Spezifität, Satz von Bayes, Konfidenzintervall, Prävalenz

Zusatzmaterialien: Excel-Datei zur Überprüfung der Ergebnisse und Simulation neuer Konstellationen

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen

Ab = Arbeitsblatt, Wh = Wiederholungsblatt, Tk = Tippkarte

1. Stunde

Thema:	Einführung
M 1 (Ab)	Covid-19 – Peter hat Angst (Einstieg)
M 2 (Ab)	Mögliche Ergebnisse medizinischer Tests
Benötigt:	<input type="checkbox"/> OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard <input type="checkbox"/> PC mit Internetzugang

2.–6. Stunde

Thema:	Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten bei medizinischen Tests
M 3 (Ab)	Was sagt ein positiver Virentest wirklich aus? / Konkrete Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und grafische Darstellung der Ergebnisse in Abhängigkeit der Prävalenz (Vortestwahrscheinlichkeit)
M 4 (Wh)	Test auf Brustkrebs – Übertragung auf einen anderen Kontext / Transfer der mit M 2 gewonnenen Kompetenzen auf einen anderen Kontext. Arbeitsblatt kann als Hausaufgabe bearbeitet werden.
M 5 (Ab)	Absicherung eines Testergebnisses durch einen zweiten Test / Wie kann die Zuverlässigkeit eines Tests erhöht werden?
M 6 (Ab)	Tippkarte
M 7 (Tk)	Beweise / Formel beweisen; Satz von Bayes anwenden
Benötigt:	<input type="checkbox"/> OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard <input type="checkbox"/> PC mit Internetzugang

Minimalplan

Von der Problemstellung her ist es sinnvoll, die Arbeitsblätter **M 1** bis **M 6** hintereinander zu bearbeiten.

M 1/M 2: je ca. 1 Stunde, je nach Vorkenntnissen

M 3: je ca. 2 Stunden

M 4/M 5/M 6/M 7: je ca. 1 Stunde

M 1

Covid-19 – Peter hat Angst (Einstieg)

Peter liest in der Tageszeitung: Über 100 000 Corona-Tote in den USA. Er möchte sich testen lassen. Seine Mutter erzählt von Angela Merkel, bei der auch ein zweiter Test durchgeführt wurde. Sie hat gehört, dass Virentests gar nicht so sicher sind. Es gebe viele Fehlerurteile bei diesen Tests. Man fühlt sich dann sicher und ist es gar nicht. Der Vater ergänzt, dass in Südamerika die Todeszahlen noch höher sind.

Peter überlegt: Ein Test wäre vielleicht doch sinnvoll. Er müsste allerdings wissen, was ein Test wirklich aussagt. Kann er sich auf das Testergebnis verlassen? Und wo findet er Aussagen über die Zuverlässigkeit von Tests?

Das Problem: Tests sind nicht immer korrekt. Bei keinem medizinischen Test wird von den Herstellern angegeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Test ein korrektes Ergebnis liefert. Stattdessen werden zwei andere Wahrscheinlichkeiten aufgeführt. Peter beschließt deshalb, sich mit medizinischen Tests zu befassen.



© MyImages_MichalStock/ Getty Images Plus

Land	Bestätigte Coronafälle	Tote	Land	Bestätigte Coronafälle	Tote
Ägypten	89 078	4 399	Niederlande	52 073	6 136
Argentinien	130 761	2 473	Osterreich	19 679	710
Australien	12 428	126	Pakistan	267 428	5 677
Belgien	64 258	9 805	Peru	362 087	13 579
Brasilien	2 159 654	81 487	Polen	40 782	1 636
Chile	334 683	8 671	Russland	783 328	12 580
China	82 711	4 648	Saudi-Arabien	255 825	2 557
Dänemark	1 302	1	Schweden	78 166	5 646
Deutschland	202 700	9 095	Schweiz	33 655	1 690
Frankreich	177 338	30 165	Spanien	266 194	28 424
GB	295 817	45 422	Südafrika	381 798	5 368
Indien	1 164 185	28 732	Süd-Korea	13 879	297
Japan	26 303	989	Tschechien	14 324	360
Kanada	111 684	8 862	Türkei	221 500	5 526
Mexiko	356 255	40 400	USA	3 902 058	142 066
			Gesamt	14 890 516	616 317

Quelle: <https://www.cdc.gov> and Centre for Disease Prevention and Control. Stand 22.7.2020

Aufgaben

Vergleichen Sie die Zahlen in der Tabelle. In welchen Ländern sind die Todeszahlen besonders hoch? Diskutieren Sie in Zweiergruppen die möglichen wirtschaftlichen und sozialen Auswirkungen des Lockdowns. Der Umgang der Regierungschefs mit der Corona-Pandemie ist ganz unterschiedlich. Woran könnte das liegen?

Was sagt ein positiver Virentest wirklich aus?

M 3

Um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass eine Person mit positivem Testergebnis wirklich mit dem Virus infiziert ist, wird neben der Sensibilität und der Spezifität noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit benötigt: die **Prävalenz (PRÄV)**.

Der Fachausdruck Prävalenz wird auch Basisrate oder Vortestwahrscheinlichkeit genannt. Es ist der Anteil der Eigenschaft oder Krankheit in der Bevölkerung. Eine Prävalenz von einem Prozent bedeutet, dass 1 % der Bevölkerung mit dem Virus infiziert ist, formal $P(W = +) = 0,01$. Von 100 Personen hat 1 Person den Virus in sich.

Mit der zusätzlichen Angabe der Prävalenz kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: Über Berechnungen der Personenanzahl mithilfe einer Tabelle oder direktes Ausrechnen mit einer Formel.

Aufgaben

10 000 Personen werden auf einen bestimmten Virus getestet. Für den Test gelten die Sensitivität (SENS) = 99 %, Spezifität (SPEZ) = 98 %.

Die Sensibilität und die Spezifität sind also bei diesem Test sehr hoch. Die Prävalenz sei 1 %.

Begriffe im
Glossar

- a) Fertigen Sie nach dem Muster in **M 1** eine Tabelle. Tragen Sie jeweils die Anzahl der **erwarteten Fälle** ein. Berechnen Sie dann aus den Fallzahlen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Test auch wirklich mit dem Virus infiziert ist.

Mit den Werten der Tabelle ergibt sich $P(W=+ | T=+) = \dots$.

Dies bedeutet:

- Nur jede zweite Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.
 dritte Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.
 vierte Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein negatives Testergebnis korrekt ist:

$$P(W = - | T = -) = \dots$$

- c) Mit den Ergebnissen von a) und b) kann der Virentest nun beurteilt werden. Wie ist das Testergebnis zu bewerten?

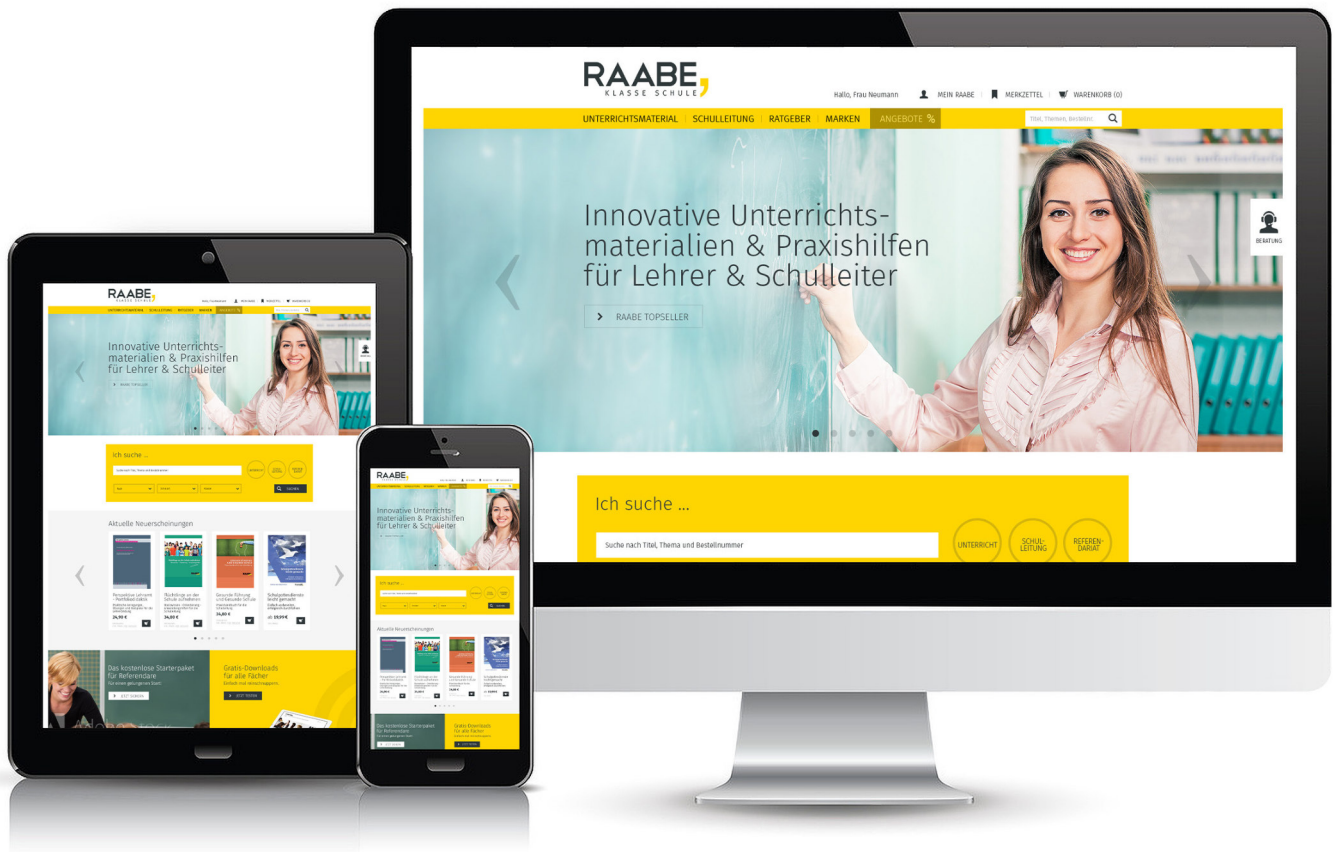
- d) Alternativ können Sie die oben gesuchten Wahrscheinlichkeiten, also die Zuverlässigkeit des medizinischen Tests, auch mit folgenden Formeln ermitteln:

$$P(W = + | T = +) = \frac{\text{SENS} \cdot \text{PRÄV}}{\text{SENS} \cdot \text{PRÄV} + (1 - \text{SPEZ}) \cdot (1 - \text{PRÄV})}$$

$$P(W = - | T = -) = \frac{\text{SPEZ} \cdot (1 - \text{PRÄV})}{\text{SPEZ} \cdot (1 - \text{PRÄV}) + (1 - \text{SENS}) \cdot \text{PRÄV}}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(W=+ | T=+)$ bei einer Prävalenz von 10 % und auch von 25 % (statt bisher von 1 %) bei sonst gleichen Daten.

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch
SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de