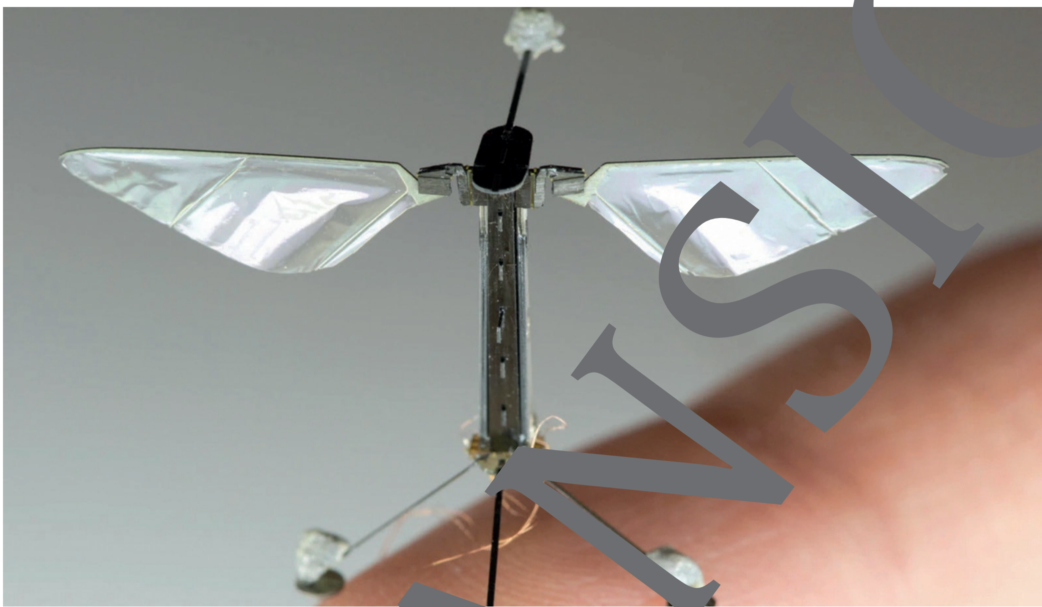
II.A.32

Analysis

Eine Biene mit Gehirn – anwendungsorientierte Aufgaben zur Abiturvorbereitung

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



© Wyss Institute at Harvard University

Eine zusammengesetzte (mit einer linearen Funktion verkettete) Sinusfunktion bietet Anlass zu verschiedenen analytischen und geometrischen Untersuchungen. Für den insektenähnlichen Roboter „RoboBee“ werden einige als Aufgaben formulierte Modellierungsaspekte betrachtet. Diese nehmen u. a. Bezug auf eine Sinusfunktion und auf physikalische Anwendungen. Die abiturähnlichen Problemstellungen sind gut einsetzbar in der Prüfungsvorbereitung.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12 (G8), 11–13 (G9)
Dauer:	[illegible] Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Thematische Bereiche:	Analysis, Winkelfunktionen
Medien:	Texte, CAS-Rechner

Didaktisch-methodische Hinweise

RoboBee ist ein sehr kleiner, einem Insekt nachempfundener Roboter, der z. B. wie eine Biene fliegen kann. Er wurde von einem Forscherteam an der Harvard University entwickelt.[1]
Der Roboter wiegt nur etwa 80 Milligramm. Seine Flügel schlagen 120 Mal pro Sekunde und damit fast so schnell wie die von einigen echten Insekten. Anders als bei einer sonst üblichen Drohne wird die Flugbewegung also nicht über rotierende Propeller, sondern durch das Auf und Ab künstlicher Flügel erzeugt. Für die mathematische Modellierung des Flügelschlags benötigt man periodische Funktionen. Dies wird zum Anlass genommen, um in diesem Beitrag zunächst in einer abiturähnlichen Aufgabe Kenntnisse über die Sinusfunktion zu reaktivieren und in einer zweiten Aufgabe einige mathematisch-physikalische Probleme zu untersuchen, die im Zusammenhang mit RoboBee aufgetreten sein könnten.

Lehrplanbezug

Zum Beispiel fordert der Thüringer Mathematiklehrplan (Gymnasium)[2] für das erhöhte Anforderungsniveau u. a. „Der Schüler kann
- inner- und außermathematische Problemstellungen mithilfe der Differenzial- und Integralrechnung bearbeiten
- dynamische Darstellungsmöglichkeiten des CAS nutzen
- Informationen aus mathematischen Sachtexten und Computerdarstellungen entnehmen und … erläutern."

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler können …	Anforderungsbereich
K4	L4	… mathematische Darstellungen erzeugen (Aufgabe 1a, g)	I
K1, K3, K6	L4, L2	… Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen und erläutern, … Strategien zur Lösung eines komplexeren Problems anwenden (Aufgabe 1b, g, h; Aufgabe 2a, b, e)	II III
K5	L4	… digitale Mathematikwerkzeuge effizient einsetzen (Aufgabe 1)	II
K2, K3	L4, L2	… einen Lösungsweg zu einer Problemstellung durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen finden (Aufgabe 1d–j; Aufgabe 2c, d)	II III

[1] Vgl. beispielsweise https://www.ingenieur.de/technik/fachbereiche/robotik/unfallfrei-luft-roboter-bienen-bekommen-laser-augen/ oder https://wyss.harvard.edu/technology/robobees-autonomous-flying-microrobots/

[2] vgl. https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392, Seiten 39 und 40

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen
Ab = Arbeitsblatt, Wh = Wiederholungsblatt

1.–3. Stunde

Thema: **Einstieg in die Differenzial- und Integralrechnung durch Wiederholung**

M 1 (Wh) Grundlagen Analysis – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ CAS

4.–6. Stunde

Thema: **Vertiefung anhand einer anwendungsorientierten Modellierungsaufgabe**

M 2 (Ab) Die Roboterbiene – Übungsaufgabe

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ CAS

Minimalplan

Beschränken Sie sich auf die Wiederholung der Grundlagen (**M 1**). Interessierten Schülern können Sie in diesem Fall das Arbeitsblatt **M 2** zum Selbststudium geben.

M 1 Grundlagen Analysis – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Aufgabe

Tipp: Bei dieser Aufgabe dürfen Sie den GTR (CAS) benutzen.

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Erstellen Sie den Funktionsgraphen von f und übertragen Sie ihn für das Intervall $0 \le x \le 2\pi$ in einer sauberen Zeichnung auf das Papier.

b) Überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt folgender Aussage:
Die Menge M aller Nullstellen von f lässt sich angeben durch $M = \{x = k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Begründen Sie Ihre Meinung.

c) Geben Sie die Funktionsterme der ersten drei Ableitungen von f an.

d) Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte des Graphen von f für $x \in \mathbb{R}$.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f im Intervall $0 < x < 2\pi$.
Weisen Sie nach, dass es in diesem Intervall genau zwei Wendetangenten gibt, die parallel zueinander sind.
Berechnen Sie den Abstand dieser parallelen Tangenten.

f) Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Normale und der Graph von f einschließen.

g) Für $0 < u < \pi$ lassen sich Dreiecke OPQ mit O(0|0), P(u|0) und Q(u|f(u)) bilden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 2$.
Berechnen Sie alle Werte von u aus dem gegebenen Intervall, für welche die Dreiecke OPQ den Flächeninhalt 1 haben.
Begründen Sie, dass der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten des Dreiecks OPQ mit dem Mittelpunkt der Seite $\overline{OQ}$ identisch ist.
Geben Sie die Koordinaten von M in Abhängigkeit von u an.
Zeigen Sie, dass $y = o(x) = \frac{1}{2} \cdot f(2x)$ mit $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$ eine Gleichung der Ortskurve von M ist, also der Kurve, auf der sich M bewegt, wenn Q auf dem Graphen von f gleitet.

h) Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse im Intervall $0 < u < \pi$ eine Fläche F ein. Dieser Fläche F soll ein Quadrat ABCD derart einbeschrieben werden, dass zwei seiner Eckpunkte auf der x-Achse und die beiden anderen Eckpunkte auf dem Graphen der Funktion f liegen. Entwickeln und beschreiben Sie eine Strategie zur Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte des Quadrates. Ermitteln Sie diese Koordinaten. Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächeninhaltes der Fläche F der Flächeninhalt des Quadrats ABCD einnimmt.

i) Untersuchen Sie, für welchen Wert k $(k \in \mathbb{R}, k > 0)$ der Graph der Funktion $y = g(x) = k(x-1)\cdot(x-2)$ den Graphen der Funktion f im Intervall $0 < x < \pi$ berührt.
Wenn die Fläche F aus Teilaufgabe h um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörper R_1. Der Graph der Funktion g aus Teilaufgabe i mit $1 \le x \le 2$ und $0 < k < 9$ schließt mit der x-Achse eine Fläche F * ein, die um die x-Achse rotiert. Der dabei entstehende Rotationskörper R_2 schneidet aus R_1 eine Höhlung heraus. Ermitteln Sie einen Wert für k, sodass der dadurch entstehende Restkörper ein Volumen von 20 Volumeneinheiten hat.

Die Roboterbiene – Übungsaufgabe

M 2

Aufgabe

Mit der ungefähr zwei Zentimeter langen *RoboBee* haben Wissenschaftler der Harvard-University in Cambridge, Massachusetts, ein Roboterinsekt vorgestellt, das einer Fliege oder Biene schon stark ähnelt.

Dieser Flugroboter hat Flügel mit einer Spannweite von ca. 3,0 cm, die etwa 120 Schläge pro Sekunde ausführen können. Es wird hier angenommen, dass der größte Abstand der Flügelspitzen von der Horizontalen im Flug 0,2 cm beträgt.

Tipp: Bei dieser Aufgabe dürfen Sie den GTR (CAS) benutzen.

a) Das Weg-Zeit-Diagramm der Bewegung der Flügelspitzen kann man als Graph einer Sinusfunktion annehmen. Begründen Sie, weshalb die Gleichung

$$y = r(t) = 0{,}002\ \text{m} \cdot \sin\left[2\pi \cdot 120\ \frac{1}{s} \cdot t\right]$$

unter diesen Annahmen als mathematisches Modell für ein solches Weg-Zeit-Diagramm (Weg in m, Zeit in s) geeignet ist.

b) Vergleichen Sie den Betrag der maximalen Beschleunigung, welche die Flügelspitzen während des Fluges erfahren, mit der Erdbeschleunigung.

Tipps:

Die Beschleunigung-Zeit-Funktion ist die 2. Ableitung der Weg-Zeit-Funktion.

Die Erdbeschleunigung hat den Wert $g \approx 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

c) Ermitteln Sie die Länge des Weges (auf mm genau), den eine Flügelspitze bei der Auf- und Abbewegung des Flügels in einer Sekunde zurücklegt.

d) Die Bewegung von RoboBee wird bei einem Testflug in den ersten 5 Sekunden nach dem Start durch das unten abgebildete Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt:

$v(t) = t^2 \cdot 0{,}6^t$.

Ermitteln Sie, welchen Weg der Roboter in dieser Zeit zurücklegt.

Begründen Sie, weshalb das Integral

$$\int_0^5 x^2 \cdot 0{,}6^x\ dx$$

den in diesem Zeitraum zurückgelegten Weg beschreibt.

Ermitteln Sie den Weg.

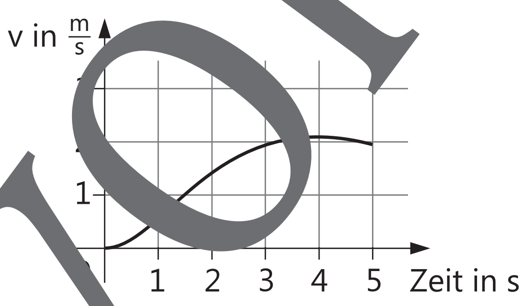
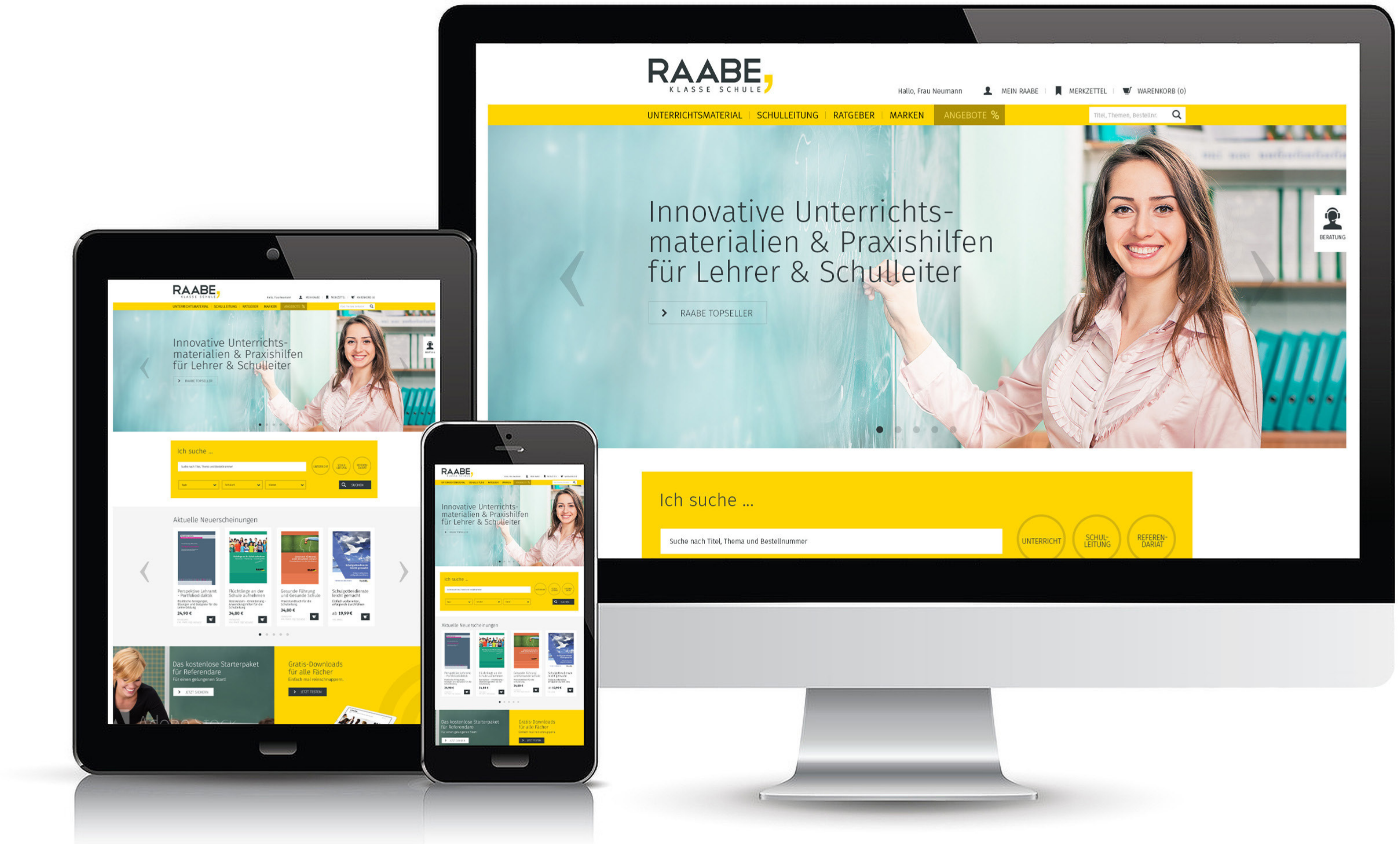


Abb. 1; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de