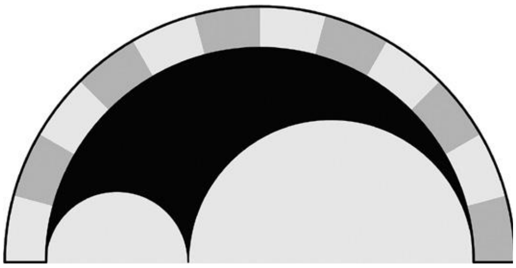
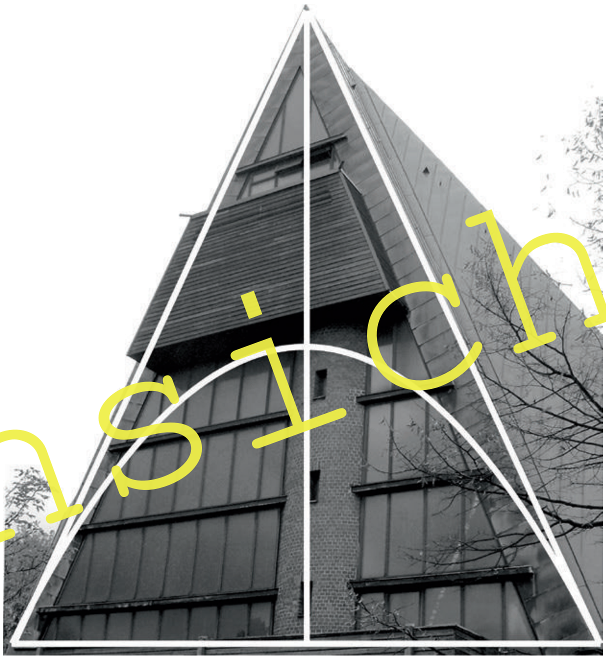
Analysis

Kurvenbögen mit GeoGebra modellieren – eine Lerntheke

Wolfgang Göbels, Bergisch Gladbach
Illustrationen von Wolfgang Göbels, digitalisiert von Dr. Wolfgang Zettlmeier





Fotos: Wolfgang Göbels

In einem gleichschenkligen Dreieck werden zunächst die einbeschriebene und die umbeschriebene Parabel betrachtet, genannt Inparabel bzw. Umparabel. Mithilfe von GeoGebra lassen sich durch dynamisches Experimentieren bemerkenswerte Eigenschaften entdecken, mit denen ausgewählte Anwendungsaufgaben praktisch gelöst werden können. In analoger Weise schließen sich Betrachtungen über andere Arten einbeschriebener bzw. umbeschriebener Kurvenbögen an.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	11/12 (G8)
Dauer:	10 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Anwendungsprobleme mit ein- und umbeschriebenen Kurvenbögen experimentell mit GeoGebra lösen, mit dynamischer GeoGebra-Unterstützung kreative Denkweisen fördern
Thematische Bereiche:	Parabeln, Halbkreise, Arbelos, Kettenlinien
Medien:	Texte, Farbfolien, Bilder
Zusatzmaterialien:	GeoGebra-Dateien auf **CD-ROM 76**

Didaktisch-methodisches Konzept

Fachliche Voraussetzungen und thematische Begründungen

Einbeschriebene und umbeschriebene Kurvenbögen sind Ihren Schülern hauptsächlich im Zusammenhang mit Inkreisen und Umkreisen bekannt. In Anlehnung an diese Begriffe kann man Parabel- und Kettenlinienbögen definieren. Auch wird die Betrachtung – ausgehend vom gleichschenkligen Dreieck – auf Trapeze erweitert.

Lassen Sie Ihre Schüler zunächst mithilfe von **GeoGebra** erfahren, wie einem gleichschenkligen Dreieck je ein Parabelbogen ein- bzw. umbeschrieben werden kann. In Analogie zu In- und Umkreisen entstehen so die Begriffe Inparabel und Umparabel. Durch dynamisches Experimentieren mit GeoGebra entdecken Ihre Schüler bemerkenswerte Eigenschaften, z. B. dass der Scheitelpunkt der Inparabel stets die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks halbiert oder dass der Flächeninhalt des Umparabelbogens doppelt so groß ist wie der des Inparabelbogens.

Aus der Inparabel eines Dreiecks ergibt sich unmittelbar die Inparabel eines Trapezes mit weiteren interessanten Eigenschaften.

Schließlich befassen sich Ihre Schüler mit doppelt einbeschriebenen Kurvenbögen: zwei Halbkreise in einem Halbkreis, zwei Parabelbögen in einem Parabelbogen und zwei Kettenlinienbögen in einem Kettenlinienbogen.

Alle Eigenschaften sind eingebettet in ausgewählte Anwendungsprobleme, deren Lösungen sich Ihre Schüler in Partner- oder Gruppenarbeit experimentell erschließen.

Die Thematik eignet sich in besonderer Weise für verschiedenartige Problemstellungen in speziellen Bereichen des Bauwesens (Hoch- und Tiefbau in **M 2** bis **M 8**), des Sports (Tennis in **M 10**) sowie des Schmuckhandels (**M 11**).

Lernvoraussetzungen

Die zugrunde liegenden mathematischen Instrumentarien stammen aus folgenden Themenbereichen:

- Termumformungen
- Parabeln
- Extremwertbestimmungen
- Steigungen
- Ableitungen
- Integration ganzrationaler Funktionen

Alle Materialien – außer der Farbfolie (**M 1**), den Hintergrundinformationen zum Arbelos (**M 9**) und den Beweiskarten (**M 12**) – enthalten zwei Arten von Aufgabenstellungen, nämlich „Experimentieren und Begründen" (Aufgabe 1) und „Modellieren" (Aufgabe 2) sowie Arbeitsaufträge für Experten in **M 2** bis **M 7**. Diese dienen zur Binnendifferenzierung.

Experimentieren und Begründen

Schwerpunktmäßig steht das Experimentieren mit GeoGebra im Vordergrund. Je nach Computerausstattung in Ihrer Schule können Ihre Schüler im Computerraum mit den zugehörigen Begleitdateien arbeiten – am besten mit Partner oder in Gruppen – mit der Zielsetzung, Regeln zu formulieren, die aus den Experimenten abgeleitet werden können. Ansonsten können Sie die Aufträge auch alternativ als Hausarbeit vergeben.

Auf einen Blick

1. Stunde

Thema: Höheneigenschaft der Inparabel eines gleichschenkligen Dreiecks entdecken

M 1 (Ab) **Ein- und umbeschriebene Figuren im Alltag**

M 2 (Ab) **Parabel in einem Dreieck – Kirchenarchitektur der besonderen Art**

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Folienkopie bzw. digitale Fassung von **M 1**

2. Stunde

Thema: Flächeneigenschaft der Inparabel eines gleichschenkligen Dreiecks entdecken

M 3 (Ab) **Parabel in einem Dreieck – Volumenvergleiche im Tiefbau (Variante 1)**

3. Stunde

Thema: Flächeneigenschaft der Umparabel eines gleichschenkligen Dreiecks entdecken

M 4 (Ab) **Parabel um ein Dreieck – Volumenvergleiche im Tiefbau (Variante 2) und im Hochbau (Variante 1)**

4. Stunde

Thema: Höheneigenschaft der Inparabel eines gleichschenkligen Trapezes entdecken

M 5 (Ab) **Parabel in einem Trapez – Längenberechnungen im Tiefbau**

5. Stunde

Thema: Flächeneigenschaft der Inparabel eines gleichschenkligen Trapezes

M 6 (Ab) **Parabel in einem Trapez – Volumenvergleiche im Hochbau (Variante 2)**

6. Stunde

Thema: Flächenvergleiche zwischen der Inparabel und der Umparabel eines gleichschenkligen Dreiecks durchführen

M 7 (Ab) **Parabel in einer Parabel – Volumenvergleiche im Hochbau (Variante 3)**

7. Stunde

Thema: Bogenlängeneigenschaften des Arbelos entdecken

M 8 (Ab) **Doppelhalbkreis in einem Halbkreis („Arbelos“) – Flächenvergleiche im Hochbau**

8. Stunde

Thema: Definition und Eigenschaft des Arbelos kennenlernen

M 9 (Ab) **Hintergrundinformationen zum Arbelos**

9. Stunde

Thema: Bogenlängeneigenschaften des Parbelos entdecken

M 10 (Ab) **Doppelparabel in einer Parabel („Parbelos“) – Wurfbahnen beim Tennis**

10. Stunde

Thema: Bogenlängeneigenschaften des Karbelos entdecken

M 11 (Ab) **Doppelkettenlinie in einer Kettenlinie („Karbelos“) – Längenvergleiche bei Ketten**

M 12(a ,b, c) (Ab) **Beweiskarten für die Expertenaufträge**

Minimalplan

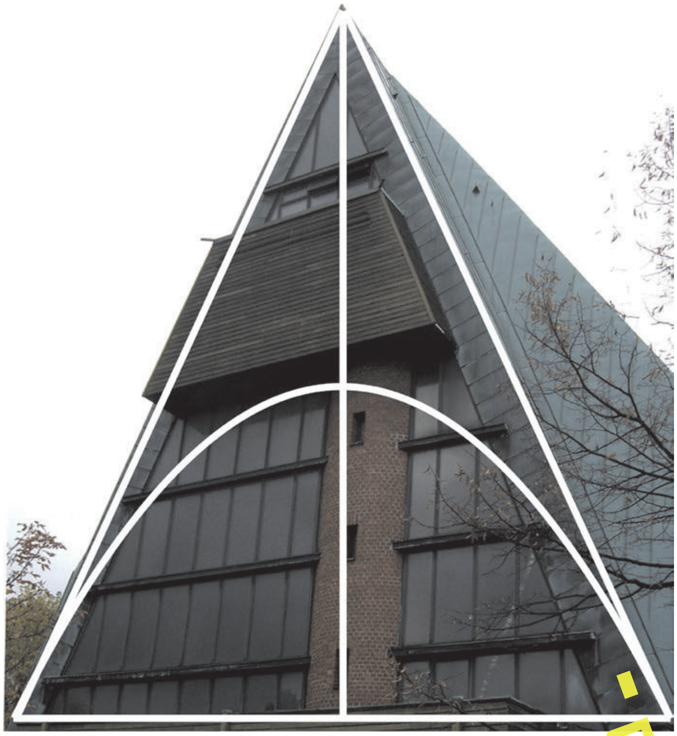
Da alle Materialien weitestgehend unabhängig voneinander einsetzbar sind, können Sie bei Zeitknappheit nach Belieben Materialien auswählen.

Erklärung der Differenzierungssymbole

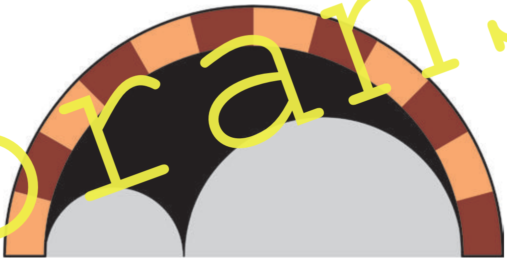
	Aufgaben, in denen generell Differenzierung möglich ist (Lehrersymbol)		Die mittleren Aufgabenvarianten
	Die anspruchsvollsten Aufgabenvarianten		Die leichtesten Aufgabevarianten

M 1 Ein- und umbeschriebene Figuren im Alltag

Kirchenarchitektur: eine Parabel in einem Dreieck



Tunnelarchitektur: zwei Halbkreise in einem Halbkreis („Arbelos“)



Kunstwerk: zwei Halbkreise in einem Halbkreis

Dekoratives Design: zwei Kettenlinien in einer Kettenlinie

Fotos: Kirche und Ketten: Wolfgang Göbels; Arbelos: © Thomas Schoch, http://www.retas.de; https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Arbelos_sculpture_Netherlands_1.jpg

Parabel in einem Dreieck – Kirchenarchitektur der besonderen Art

M 2

Merke:
Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Höhe h und der Grundseitenlänge c sei ein Parabelbogen so einbeschrieben, dass die beiden Schenkel den Parabelbogen in A und B berühren. Dann wird diese Parabel **Inparabel des Dreiecks** genannt.
Die Maßzahl des von einer Inparabel und der Dreiecksgrundseite umrandeten Flächenstücks werde mit A_I bezeichnet.

Die Abbildung zu Aufgabe 2 veranschaulicht die Inparabel eines Dreiecks.

Aufgaben

1. Experimentieren und Begründen:

a) Öffnen Sie die Datei **M02_Inparabel.ggb**.

b) Betätigen Sie den Schieberegler und ziehen Sie die Spitze des Dreiecks nach unten.

c) Finden Sie heraus, welche Eigenschaft die Höhe besitzt.

d) Formulieren Sie eine entsprechende Regel.

2. Modellieren:

Lösen Sie die nachfolgende Aufgabe, indem Sie die Eigenschaft der Höhe unmittelbar anwenden.

a) Wie hoch ist die Kirchenfassade, wenn der Innenraum 5 m hoch ist?

b) Wie hoch ist der Kircheninnenraum, wenn die Fassade 10 m hoch ist?

Der Querschnitt einer Kirchenfassade hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Der Gewölbequerschnitt im Kircheninnern ist parabelförmig und vom Architekten so gestaltet, dass die beiden Dreiecksschenkel als Parabeltangenten am Boden der Kirche auftreffen.

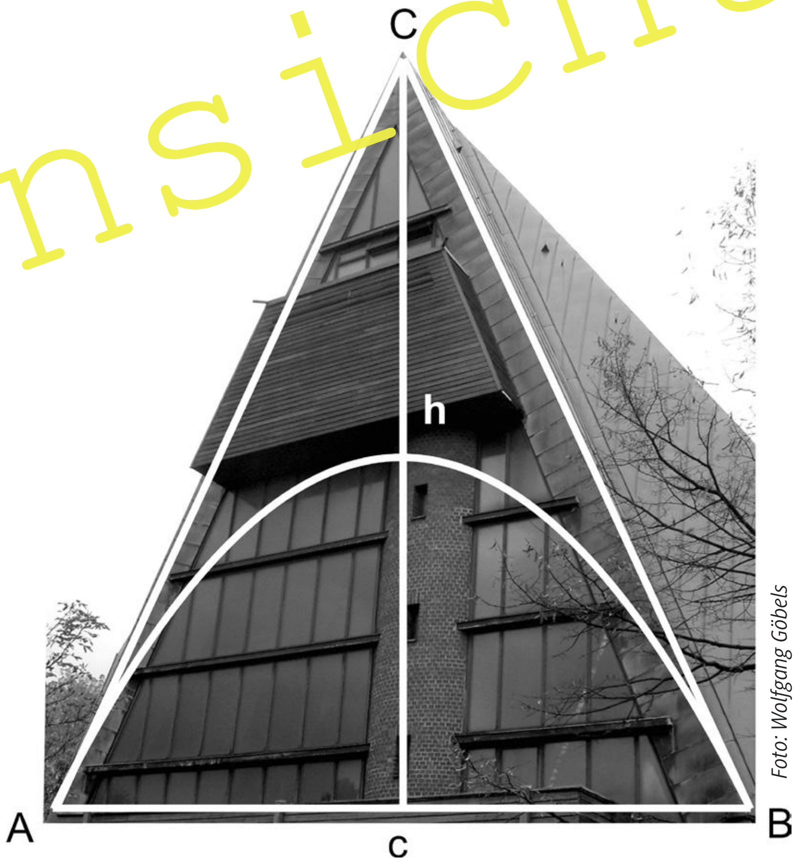


Foto: Wolfgang Göbels

Für Experten

Erläutern Sie Ihren Mitschülern den zugehörigen Beweis der in Aufgabe 1 aufgestellten Regel.

Parabel um ein Dreieck – Volumenvergleiche im Tiefbau (Variante 2) und im Hochbau (Variante 1)

M4

Merke:
Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Höhe h und der Grundseitenlänge c sei ein Parabelbogen so umbeschrieben, dass er durch die drei Eckpunkte A, B und C verläuft.
Dann wird diese Parabel **Umparabel des Dreiecks** genannt.
Die Maßzahl des von einer Umparabel und der Dreiecksgrundseite umrandeten Flächenstücks werde mit A_U bezeichnet.

Die Abbildung zu Aufgabe 2 veranschaulicht die Umparabel eines Dreiecks.

Aufgaben

1. Experimentieren und Begründen:

a) Öffnen Sie die Datei **M04_Umparabel.ggb**.

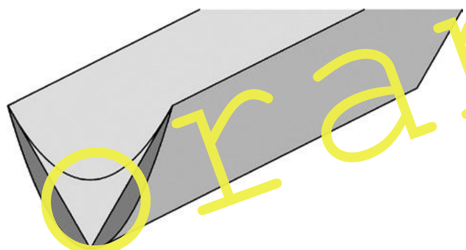
b) Betätigen Sie den Schieberegler und ziehen Sie die Spitze des Dreiecks nach unten.

c) Finden Sie heraus, welche Beziehung zwischen dem Dreieck und seiner Umparabel besteht.

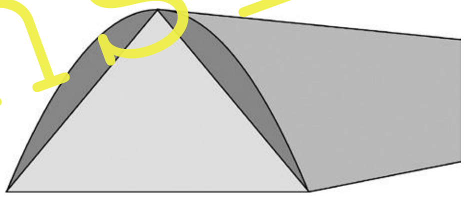
d) Formulieren Sie eine entsprechende Regel.

2. Modellieren:

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben, indem Sie die gefundene Eigenschaft unmittelbar anwenden.



a) Der Querschnitt eines Kanals A hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Der Querschnitt eines gleich langen Kanals B ist parabelförmig. Um wie viel Prozent ist das Fassungsvermögen des Kanals B größer als das des Kanals A, wenn die Breiten (Grundlinien) und Tiefen beider Kanäle identisch sind?



b) Der Querschnitt einer Halle A hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Der Querschnitt einer gleich langen Halle B ist parabelförmig. Um wie viel Prozent ist das Innenraumvolumen der Halle B größer als das der Halle A, wenn die Breiten (Grundlinien) und Höhen beider Hallen identisch sind?

Für Experten

Erläutern Sie Ihren Mitschülern den zugehörigen Beweis der in Aufgabe 1 aufgestellten Regel.

Parabel in einem Trapez – Volumenvergleiche im Hochbau (Variante 2) M 6

Aufgaben

1. Experimentieren und Begründen:

a) Öffnen Sie die Datei **M06_Inparabel_Trapez.ggb**.

b) Betätigen Sie die Schieberegler.

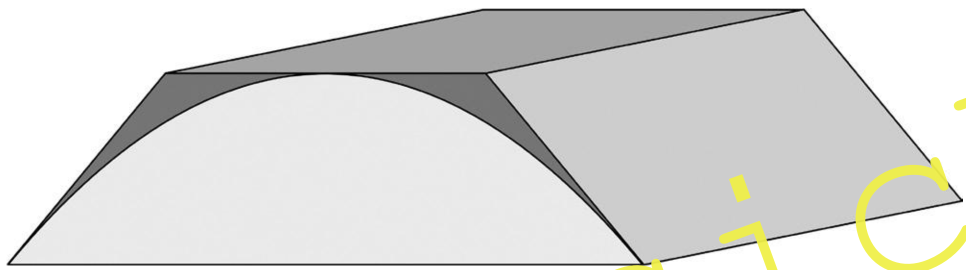
c) Finden Sie heraus, welche Beziehung zwischen dem Trapez und seiner Inparabel besteht.

d) Formulieren Sie eine entsprechende Regel.

2. Modellieren:

Lösen Sie die nachfolgende Aufgabe, indem Sie die gefundene Eigenschaft unmittelbar anwenden.

Um wie viel Prozent ist das Innenraumvolumen der Halle B kleiner als das der Halle A?



Eine Halle A hat den Querschnitt eines gleichschenkligen Trapezes.
Eine gleich lange Halle B hat einen parabelförmigen Querschnitt.
Die Bodenwinkel, Maximalbreiten und Höhen beider Hallen sind identisch.

Für Experten:

Erläutern Sie Ihren Mitschülern den zugehörigen Beweis der in Aufgabe 1 aufgestellten Regel.

Doppelhalbkreis in einem Halbkreis („Arbelos") – Flächenvergleiche im Hochbau

M 8

Merke:
Einem Halbkreis sind zwei Halbkreise derart einbeschrieben, dass die beiden inneren Halbkreise sich im Punkt C treffen und den äußeren Halbkreis in den Punkten A und B berühren. Dann wird die von den drei Halbkreisen begrenzte Figur Arbelos genannt.

Hintergrundinformationen zum Thema Arbelos finden Sie in **M 9**.

Aufgaben

1. Experimentieren und Begründen:

a) Öffnen Sie die Datei **M08_Arbelos_Halbkreise.ggb**.

b) Ziehen Sie den gelben Punkt nach links bzw. nach rechts.

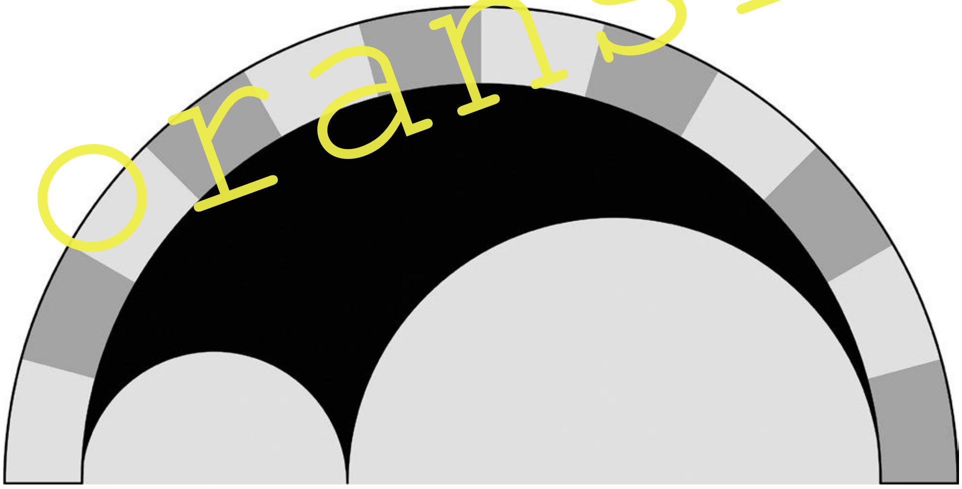
c) Finden Sie heraus, welche Beziehung zwischen den drei Halbkreisen des Arbelos besteht.

d) Formulieren Sie eine entsprechende Regel.

2. Modellieren:

Lösen Sie die nachfolgende Aufgabe, indem Sie die gefundene Eigenschaft unmittelbar anwenden.

Welche Beziehungen bestehen zwischen der Größe der Innenfläche des ursprünglichen Tunnels und der Größe der Gesamt-Innenfläche der beiden neuen Tunnel?



Ein halbzylinderförmiger Straßentunnel soll zu zwei formgleichen Tunneln umgebaut werden, einem niedrigen für Fußgänger und Radfahrer und einem höheren für Kraftfahrzeuge. Der zwischen dem ursprünglichen Tunnel und den beiden neuen Tunneln entstehende Hohlraum soll aufgefüllt werden.

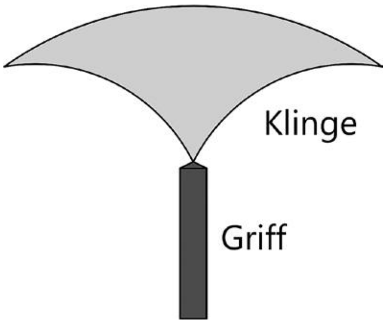
M 9 Hintergrundinformationen zum Arbelos

Die vermutlich von dem berühmten griechischen Mathematiker Archimedes untersuchte sichelförmige Figur namens Arbelos (griechisch Arbylos = Schustermesser) ist eine von drei Halbkreisen begrenzte geometrische Figur. Die Bezeichnung rührt daher, dass diese geometrische Figur eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Schustermesser aufweist.

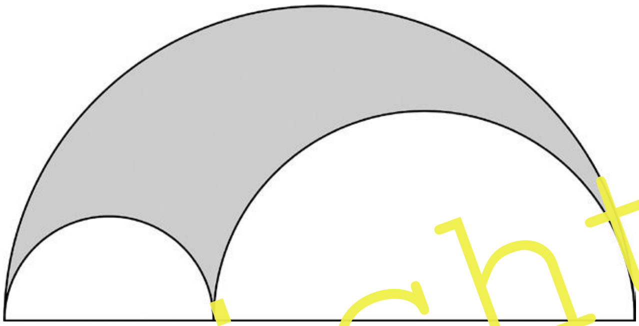
Aufgabe

Für Experten: Beweisen Sie, dass der Umfang U des größten Halbkreises mit dem Gesamtumfang $U_1 + U_2$ der beiden kleinsten Halbkreise übereinstimmt.

Hinweis: Diese Eigenschaft lässt sich bei Streckung der Gesamtfigur analog auf Halbellipsen übertragen (Datei **M09_Arbelos_Halbellipsen.ggb**).



Schustermesser



d_1 $d - d_1$

Arbelos-Skulptur in Kaatsheuvel, Niederlande

M 11 Doppelkettenlinie in einer Kettenlinie („Karbelos“) – Längenvergleiche bei Ketten

Merke:
Eine Kettenlinie ist eine mathematische Kurve, die den Durchhang einer an ihren Enden aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt. Es handelt sich um eine elementare mathematische Funktion, den Kosinus hyperbolicus, kurz cosh.
Die Abbildung der Wurfbahnen zu Aufgabe 2 veranschaulicht ein Parbelos.


Aufgehängte Kette


Aufgehängte Kette mit eingezeichneter Kettenlinie

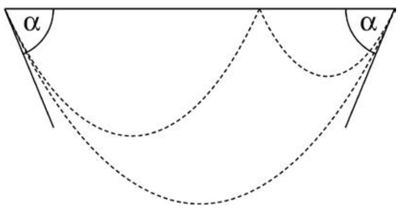
Fotos: W. Göbels

Beachte:
Eine Kettenlinie ist keine Parabel, wenn sie auch eine ähnliche Form hat.
Einem Kettenlinienbogen sind zwei Kettenlinienbögen derart einbeschrieben, dass die beiden inneren Bögen sich im Punkt C treffen und den äußeren Bogen in den Punkten A und B berühren. Dann wird die von den drei Kettenlinienbögen begrenzte Figur Karbelos genannt.
Die Abbildungen zu Aufgabe 2 veranschaulichen jeweils ein Karbelos.

Aufgaben

1. **Experimentieren und Begründen:**
   a) Öffnen Sie die Datei **M11_Ketten.ggb**.
   b) Ziehen Sie den gelben Punkt nach links bzw. nach rechts.
   c) Finden Sie heraus, welche Beziehung zwischen den drei Kettenlinienbögen des Karbelos besteht.
   d) Formulieren Sie eine entsprechende Regel.

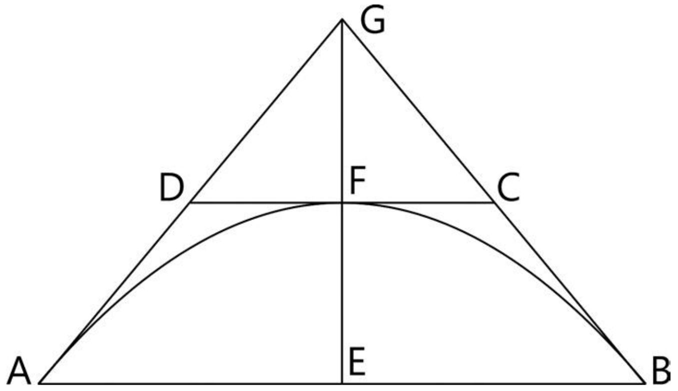
2. **Modellieren:**
   Lösen Sie die nachfolgende Aufgabe, indem Sie die gefundene Eigenschaft unmittelbar anwenden. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Längen der drei Ketten?



Um einen besonderen optischen Effekt zu erzielen, hängt ein Juwelier im Schaufenster seines Geschäftes drei Goldketten wie abgebildet an drei Punkten, die auf einer waagerechten Linie liegen, auf. An den beiden äußeren Befestigungspunkten sollen sich die Ketten unter demselben Winkel α treffen.

Beweiskarten für die Expertenaufträge (Teil 1) M 12a

Skizze zu den Beweisen zu M 2 bis M 7



Beweis zu M 2

In der abgebildeten Planskizze soll c die Länge der Seite AB (Grundseite), a der Streckungsfaktor der Parabel und h die Länge der Seite EG (Höhe) in dem y-achsensymmetrischen gleichschenkligen Dreieck ABG sein.

Die Figur soll in ein Koordinatensystem eingebettet sein mit

$A\left(-\frac{c}{2}\middle|\,0\right)$, $E(0\,|\,0)$, $B\left(\frac{c}{2}\middle|\,0\right)$ und $G(0\,|\,h)$.

Dann hat die Parabel die Funktionsgleichung $f_1(x) = ax^2 + d$ mit der Ableitung $f_1'(x) = 2ax$.

Aus $f_1\left(\frac{c}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{ac^2}{4} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{4}ac^2$ folgt zunächst: $f_1(x) = ax^2 - \frac{1}{4}ac^2 = a\left(x^2 - \frac{1}{4}c^2\right)$.

Die Steigung der Geraden durch $A\left(-\frac{c}{2}\middle|\,0\right)$ und $G(0|h)$ beträgt $m = \frac{h-0}{0-\left(-\frac{c}{2}\right)} = \frac{2h}{c}$ und ist

identisch mit $f_1'\left(-\frac{c}{2}\right) = 2a\cdot\left(-\frac{c}{2}\right) = -ac$.

Deshalb gilt: $\frac{2h}{c} = -ac$, also $a = -\frac{2h}{c^2}$. Also lautet die von c und h abhängige Parabelgleichung:

$$f_1(x) = \left(-\frac{2h}{c^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}c^2\right) = -\frac{2h}{c^2}x^2 + \frac{h}{2}.$$

Der Parabelscheitel ist demnach $F\left(0\,\middle|\,\frac{h}{2}\right)$ und halbiert somit die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABG.

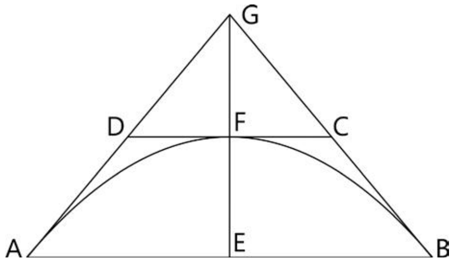
M 1 Ein- und umbeschriebene Figuren im Alltag

Auf den Fotos ist Folgendes zu sehen:

1. Dreieckskirche mit parabelförmigem Innenraumquerschnitt
2. Tunnel mit getrennten Röhren: links für Fußgänger und Radfahrer, rechts für Kraftfahrzeuge
3. Arbelos-Skulptur in Kaatsheuvel, Niederlande
4. Hängende Goldkette mit zwei innen hängenden kleineren Goldketten

Hinweise (M 2 – M 7)

Die nebenstehende abgebildete Planskizze bezieht sich auf die Materialien **M 2** bis **M 7**.
Ferner sei A_I die Flächenmaßzahl der Inparabel, A_U die der Umparabel, A_D die des Dreiecks und A_T die des Trapezes.



Erwartungshorizont (M 2)

1. Experimentieren mit der GeoGebra-Datei führt zu folgender Regel:
   Die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks wird durch den Scheitel seiner Inparabel halbiert.
2. a) Da der Parabelscheitel die Dreieckshöhe halbiert, ist die Kirchenfassade $2 \cdot 5$ m = 10 m hoch.
   b) Da der Parabelscheitel die Dreieckshöhe halbiert, ist der Kircheninnenraum höchstens $0{,}5 \cdot 10$ m = 5 m hoch.

Für Experten:
Zum Beweis für Experten siehe **M 12a**.

Erwartungshorizont (M 3)

1. Experimentieren mit der GeoGebra-Datei führt zu folgender Regel:
   Die Inparabel eines gleichschenkligen Dreiecks teilt die Dreiecksfläche im Verhältnis 1 : 2.

2. Wegen $\frac{A_I}{A_D} = \frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}$ % ist das Fassungsvermögen des Kanals B um $33\frac{1}{3}$ % kleiner als das des Kanals A.

Für Experten:
Zum Beweis für Experten siehe **M 12b**.

Erwartungshorizont (M 4)

1. Experimentieren mit der GeoGebra-Datei führt zu folgender Regel:
   Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks teilen seine Umparabel im Verhältnis 1 : 3.

2. a) Wegen $\frac{A_D}{A_U} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{A_U}{A_D} = \frac{4}{3} = 133\frac{1}{3}$ % ist das Fassungsvermögen des Kanals B um $33\frac{1}{3}$ % größer als das des Kanals A.