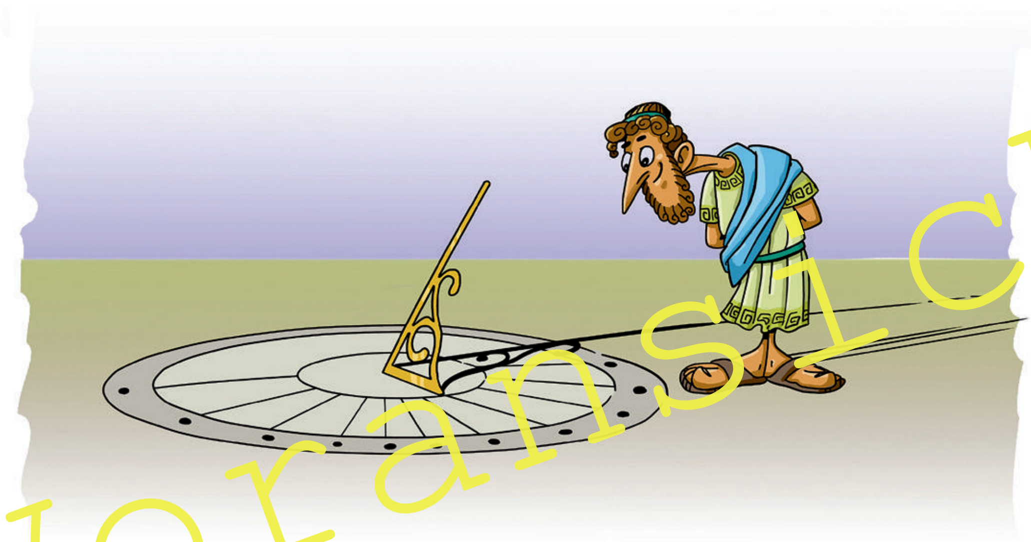
Fachübergreifend arbeiten

Der Tangens im rechtwinkligen Dreieck – Anwendungen

Barbara Theuer, Friedrichroda / OT Finsterbergen
Illustrationen von Wolfgang Zettlmeier



© Fotolia

Wenn am *Equator Line Monument* die Sonne senkrecht im Zenit steht, demonstrieren die realen Schatten anschaulich den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel der Sonne und der Schattenlänge eines Gegenstandes. An diesem Beispiel verstehen Ihre Schüler die Bedeutung von Definitions- und Wertebereich der Tangensfunktion.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	10 (G8)
Dauer:	6–7 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	1. Strahlensatz; 2. Einführung des Tangens; 3. Hinführung zur allgemeinen Definition des Tangens am rechtwinkligen Dreieck; 4. Anwendungsaufgaben
Thematische Bereiche:	Algebra
Medien:	Texte, Farbfolie

Didaktisch-methodische Hinweise

Stichpunkte zum Inhalt

- Fachübergreifend zum Sonnenstand in Abhängigkeit von der geografischen Breite recherchieren;
- Bezug zur Höhenberechnung im Altertum mittels Schattenstab und Strahlensatz;
- Einführung des Tangens als Seitenverhältnis von Höhe eines Gegenstandes und seiner Schattenlänge;
- Hinführung zur allgemeinen Definition des Tangens am rechtwinkligen Dreieck;
- Zeichnerisches Ermitteln von Tangenswerten in Gruppenarbeit;
- Darstellung am Einheitskreis und anschauliche Erklärung von Definitions- und Wertebereich der Tangensfunktion;
- Anwendungsaufgaben wie Berechnung von Turmhöhen,
- Einfallswinkeln von Sonnenstrahlen, Steigungen von Straßen und Anstiegsberechnungen von Tangenten an Funktionsgraphen

Ihr Plus

- gute Motivation durch anschauliche Einführung des Tangens und Bezug zur Praxis
- fachübergreifend (Geografie, Geschichte, Astronomie)
- experimentell nachvollziehbar
- vielfältige Anwendungsaufgaben zu interessanten praktischen Sachverhalten
- auch in Klasse 11 zur Wiederholung einsetzbar
- Vorbereitung auf die Behandlung der Differenzialrechnung
- Lernerfolgskontrolle

Fachlicher Hintergrund

Über Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck einschließlich der Anwendungen zur Berechnung von Turmhöhen, Steigungen im Gelände usw. – welche an allen Schularten laut Lehrplan im zehnten Schuljahr zu behandeln sind – hinaus, ist die Kenntnis des Tangens eine unerlässliche Voraussetzung für das Verständnis grundlegender Bausteine der im elften Schuljahr am Gymnasium einzuführenden Differenzialrechnung.

Für den Anstieg m von – insbesondere auch nichtlinearen – Funktionen an einer Stelle x_0, was dem Anstieg der Tangente an den Funktionsgraphen von f an der Stelle x_0 entspricht, gilt:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha), \quad \Delta x = x - x_0 \text{ und } \Delta y = y - y_0$$

Der Tangens des Anstiegswinkels α der Tangente an den Funktionsgraphen f an der Stelle x_0 ist somit gleich dem Grenzwert des Differenzenquotienten mit den Koordinatendifferenzen Δx und Δy im Steigungsdreieck der Tangente bei gegen null strebendem Wert für Δx, was bedeutet, dass x gegen x_0 strebt.

Lehrplanbezug

Im Lehrplan (Bundesland Thüringen) für die Klassenstufe 10 am Gymnasium wird als Sachkompetenz im Abschnitt Geometrie unter anderem gefordert:

Auf einen Blick

1. Stunde

Thema: **Einstieg mit Rechercheaufgaben**

M 1 (Ab) **Wenn die Sonne im Zenit steht**
Fachübergreifende Recherchen zum Sonnenstand in der Zone zwischen südlichem und nördlichem Wendekreis; Schattenbildung bei Zenitstand der Sonne geometrisch als senkrechte Parallelprojektion erklären

M 2 (Ab) **Schatten des Equator Line Monuments**
Ergänzung des Fotos vom Equator Line Monument zu einem rechtwinkligen Dreieck und Beschriftung der Seiten und Winkel nach Vorgabe in selbstständiger Schülerarbeit
Schüler formulieren mögliche Fragen zum Sachverhalt „Schatten des Monuments“
Aufgabe zur Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes

Hausaufgabe: Steckbrief des Equator Line Monuments Quitsato erarbeiten

Benötigt: ☐ Internetzugang (alternativ, wenn nicht als Hausaufgabe)

2. Stunde

Thema: **Sätze für das rechtwinklige Dreieck**

M 3 (Ab) **Sonnenstrahlen, Pyramiden und ein historischer Lehrsatz**
Verfahren des Thales zur Höhenbestimmung von Pyramiden im Altertum mit einem Schattenstab; Wiederholung des Strahlensatzes; Hinführung zur Definition des Tangens als spezielles winkelabhängiges Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken

M 4 (Ab) **Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck**
Zusammenfassung zur Deutung des Tangens als Funktion eines spitzen Winkels
$f(\alpha) = \tan(\alpha)$ im rechtwinkligen Dreieck (siehe **M 3**)
Definition des Tangens als Quotient von Gegenkathete und Ankathete
Auftrag zur praktischen Bestimmung des Sonneneinfallswinkels

Benötigt: ☐ Internetzugang

3. Stunde

Thema: **Praktische Berechnungen mit der Tangensfunktion**

M 5 (Ab) **Berechnung der Höhe des *Equator Line Monuments***
Ermittlung der Tangenswerte für vorgegebene spitze Winkel durch Konstruktion von Dreiecken und Messen der entsprechenden Seitenlängen in Gruppenarbeit

M 5 (Ab)
Tabelle mit den Ergebnissen der in Gruppenarbeit ermittelten Tangenswerte an der Tafel (Lösungsfolie) zusammenstellen
Bearbeitung einer komplexen Aufgabe zur Berechnung
- der Turmhöhe des *Equator Line Monuments* sowohl mithilfe des Strahlensatzes als auch mittels Einsatz der zeichnerisch ermittelten Werte für den Tangens ausgewählter Winkel
- seiner Schattenlänge bei verändertem Sonnenstand
- des Einfallswinkels der Sonne bei bekannter Turmhöhe und bekannter Schattenlänge

M 6 (Ab)
Berechnung der Höhe des *Equator Line Monuments* – Lösung
Farbfolie mit Lösungen zu den Aufgaben der Materialien **M 2** und **M 5**
Darstellung der Schattenbildung am *Equator Line Monument* durch ein rechtwinkliges Dreieck mit Beschriftung laut Vorgabe (Aufgabe 1, **M 2**)
Tabelle ausgewählter Funktionswerte für den Tangens
(Ergebnis der Gruppenarbeit)
Berechnung der Höhe des *Equator Line Monuments* mithilfe des Tangens – Lösung mit Lösungsweg zur Aufgabe 2c, **M 5** (Ergebnissicherung)

Benötigt:
☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard bzw. Dokumentenkamera

4. Stunde

Thema: **Exkurs**

M 7 (Ab)
Ein Seitensprung vom Tangens am rechtwinkligen Dreieck zum Einheitskreis
Darstellung des Sachverhaltes *Schattenbildung am Equator Line Monument* im 1. Quadranten des Einheitskreises
Verhalten der Tangensfunktion an den Grenzen des Definitionsbereiches mittels realer Schatten deuten
Wortherkunft von *Tangens* als Bezeichnung für das Seitenverhältnis von Gegenkathete und Ankathete am Einheitskreis erklären

Hausaufgabe:
in Vorbereitung auf die 5. Stunde
Den Zusammenhang zwischen der geografischen Breite eines Ortes auf der Nordhalbkugel und dem maximalen Einfallswinkel der Sonne finden

5. Stunde

Thema: **Anwendungen**

M 8 (Ab) **Mit Sonne und Schatten rechnen**

Der Gnomon (Schattenzeiger) als ein bereits vor der Antike bekanntes astronomisches Messinstrument

Nutzung des Taschenrechners zur Bestimmung von Funktionswerten der Tangensfunktion *tan(α)* und ihrer Umkehrfunktion *arctan(α)*

Experimentelle Bestimmung des Sonneneinfallswinkels mit einem Schattenstab bei Nutzung des Taschenrechners

Berechnung der minimalen Schattenlänge des Berliner Fernsehturms am längsten Tag des Jahres in selbstständiger Schülertätigkeit

M 9 (Ab) **Steigungsprobleme**

Definition der *Steigung* in Prozent im Straßenverkehr

Berechnung der Neigung der Fichtelberg-Schwebebahn

Berechnung der Entfernung zweier Orte mit Höhenangaben auf einer Wanderkarte

Multiple-Choice-Aufgabe, funktionales Denken (Tangens)

Berechnung des Höhenunterschiedes und des Neigungswinkels der steilsten Straße der Welt und maßstäbliche Darstellung des Sachverhalts

6. Stunde

Thema: **Fakultatives Material für leistungsstarke Klassen**

M 10 (Ab) **Anstieg von Funktionen**

Schnittwinkel α der Funktionsgeraden einer linearen Funktion mit der x-Achse aus der Kenntnis des Anstiegs m mithilfe des Tangens bestimmen

Umgekehrt aus der Kenntnis des Anstiegswinkels α den Anstieg m der linearen Funktion ermitteln

Anstieg quadratischer Funktionen an einer Stelle x_0 bei bekanntem Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse ermitteln

Ermittlung des Anstiegs der Tangente an den Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ ohne Kenntnis des Anstiegswinkels der Tangente (zur Vorbereitung auf die Behandlung des Differenzialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten im elften Schuljahr)

7. Stunde

M 11 (LEK) **Der Tangens im rechtwinkligen Dreieck – Lernerfolgskontrolle**

M 1 Wenn die Sonne im Zenit steht

© Fotolia

Aufgaben

1. Wie oft steht die Sonne am *Equator Line Monument* jährlich im Zenit? Verfasse einen **Steckbrief** mit interessanten Fakten zum *Equator Line Monument Quitsato*. Suche dazu in Nachschlagewerken oder im Internet nach entsprechenden Informationen.
2. Die Lampe rechts im Bild steht in Singapur. Hier steht die Sonne am 17. September mittags im Zenit. Vergleiche bei senkrechtem Schattenwurf Größe und Lage des Schattens mit dem Original.
3. Begründe, dass die Schattenbildung bei Zenitstand der Sonne geometrisch der senkrechten Parallelprojektion entspricht.
4. Ermittle die geografischen Koordinaten von Singapur. Welche der Koordinaten ist für den Sonnenstand verantwortlich?
5. In welchen Zonen der Erde erreicht die Sonne den Zenit?

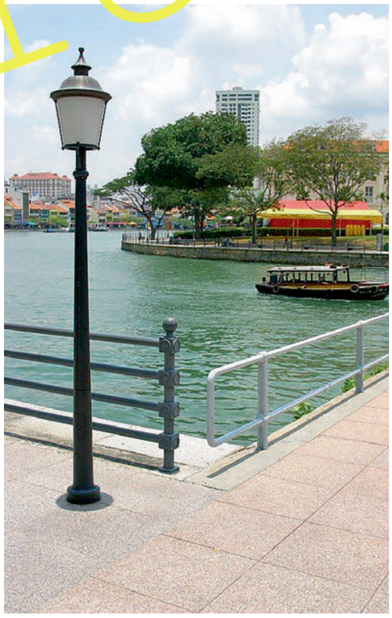
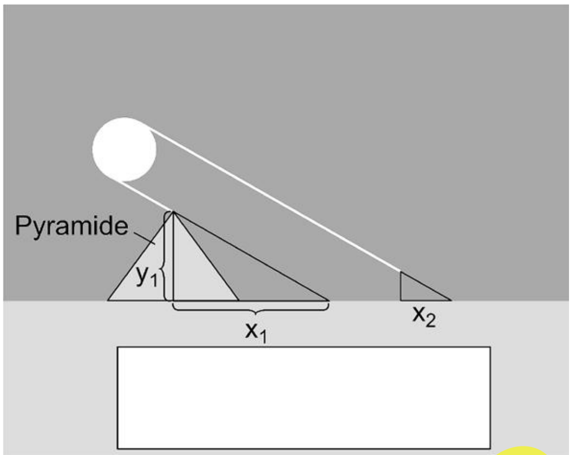


Foto: Wikipedia

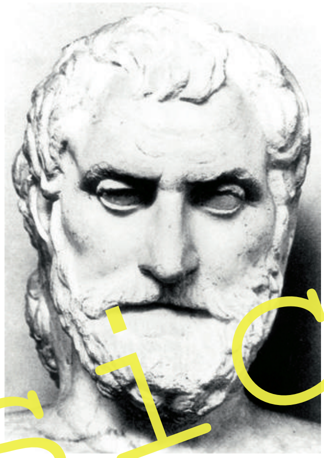
Sonnenstrahlen, Pyramiden und ein historischer Lehrsatz M 3

Bereits in der Antike war es möglich, die Höhe der Cheopspyramide zu berechnen.
Thales von Milet gilt vermutlich als Urheber des grundlegenden Lehrsatzes, nach dem ihm die Berechnung der Pyramidenhöhe gelang.

Name des Satzes:



Höhenbestimmung im Altertum



Thales von Milet (624–546 v. Chr.)

Aufgaben

1. Wie nennt man heute den fundamentalen Lehrsatz, welchen Thales von Milet inhaltlich zur Berechnung der Pyramidenhöhe aufstellte?
   Trage den Namen des Satzes sowie die zu dem im Bild dargestellten Sachverhalt passende Gleichung in die Kästen oben ein.
2. Welche Größen müssen bekannt sein bzw. gemessen werden, um die Höhe der Pyramide zu berechnen?
3. Forme die Gleichung (siehe Aufgabe 1) nach y_1 um.
   Bringe sie dann in die Form:

   $y_1 = \text{Faktor k} \cdot x_1$

   Im Folgenden nennen wir diesen Faktor im grauen Kreis einfach k.
4. Wovon ist bei konstanter Höhe des Schattenstabes y_2 (gebräuchlich $y_2 = 1$ LE) der Wert des Faktors k abhängig?
   Stelle den Sachverhalt in einer Skizze dar.

M 6 Berechnung der Höhe des *Equator Line Monuments* – Lösung

© Fotolia

Tabelle ausgewählter Funktionswerte für den Tangens

α	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
$\tan\alpha$	≈ 0,18	≈ 0,36	≈ 0,58	≈ 0,84	1,00	≈ 1,19	≈ 1,73	≈ 2,75	≈ 5,67

Berechnung der Höhe des Equator Line Monuments mithilfe des Tangens

gegeben: Höhe des Schattenstabes: $a_S = 1$ m

Schattenlänge des Stabes: $b_S = 5{,}67$ m

Schattenlänge des Monuments: $b_T = 56{,}7$ m

gesucht: Höhe des Monuments: a_T

<u>Lösung:</u> Aus der Kenntnis der Schattenlänge des 1 m hohen **Stabes** wird $\tan\alpha$ berechnet:

$$\tan\alpha = \frac{a_s}{b_s} = \frac{1\text{ m}}{5{,}67\text{ m}} = 0{,}1764 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 10° \text{ (Tabelle oben)}$$

Für das **Monument** gilt:

$$\tan(10°) = \frac{a_T}{b_T} = \frac{a_T}{56{,}7\text{ m}} \Rightarrow a_T = \tan(10°)\cdot 56{,}7\text{ m} \approx 10\text{ m}$$

Das Equator Line Monument ist etwa zehn Meter hoch.

Wenn gilt: $\beta = 90° - \alpha$,
folgt: $\tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.
Zur Information:
$\tan\beta = \cot\alpha$
(Kotangens α)

Mit Sonne und Schatten rechnen

M 8

Der Gnomon (Schattenzeiger) ist ein bereits vor der Antike bekanntes astronomisches Instrument in Form eines senkrecht in den Boden gesteckten hölzernen Stabes. Er diente vor allem als Schattenstab für Sonnenuhren, aber auch zur Bestimmung geografischer und astronomischer Größen.

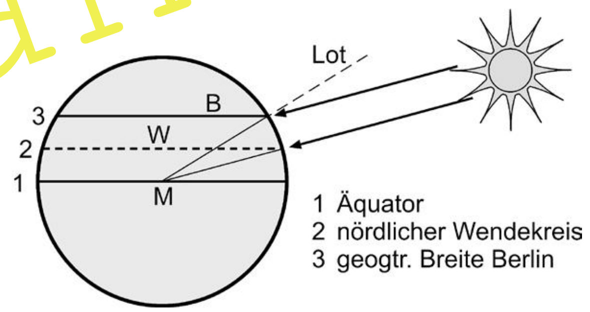
Aufgaben

1. Erkläre das Grundprinzip zur Bestimmung des Sonneneinfallswinkels mit einem *Gnomon* unter Nutzung des Tangens. Führe jeweils 12 Uhr (13 Uhr Sommerzeit) eine Messung auf dem Schulhof oder auch zu Hause durch, protokolliere die Ergebnisse und berechne den Einfallswinkel der Sonne zu diesem Zeitpunkt.

   Um Tangenswerte eines Winkels α mit einer sehr großen Genauigkeit zu ermitteln, nutze die Funktionstaste des Taschenrechners [*tan*]. Ist bei bekanntem Tangenswert tan α der zugehörige Winkel α ($0° \leq \alpha < 90°$) gesucht, also *arctan*, wird die Umkehrtaste – zum Beispiel [*shift*] [*tan*] – betätigt. Tastenfolge und Beschriftung der Umkehrtaste sind dabei je nach Taschenrechnermodell verschieden.

© Fotolia

2. Ein Schattenstab der Länge 1,50 m wirft
   a) einen 1,50 m langen Schatten b) einen 3 m langen Schatten
   – Berechne jeweils den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen.
   – Nimm Stellung zu der Auffassung, dass die Verdopplung der Schattenlänge desselben Gegenstandes durch Halbierung des Einfallswinkels der Sonne verursacht wird.
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der geografischen Breite eines Ortes auf der Nordhalbkugel und dem maximalen Einfallswinkel der Sonne? Fertige hierzu zuerst eine Vergrößerung der Skizze von nebenstehender Abbildung an. Ergänze dann die Horizontalen in den Punkten B und W sowie die Winkel α, β, φ und ω (siehe Legende) und versuche anschließend den Zusammenhang zu finden.
4. Welche minimale Länge hat der Schatten des Berliner Fernsehturmes am längsten Tag des Jahres 13 Uhr Sommerzeit? Stelle dazu alle erforderlichen Angaben übersichtlich zusammen, fertige eine Skizze an und notiere den Lösungsweg.



α Sonneneinfallswinkel in Berlin

β Winkel zwischen Sonnenstrahlen und dem Einfallslot in Berlin

$\varphi = \sphericalangle$ ÄMB geografische Breite von Berlin

$\omega = \sphericalangle$ ÄMW geografische Breite des nördlichen Wendekreises (23,43°)

Sonneneinfall am 21. Juni mittags in Berlin

Der Tangens im rechtwinkligen Dreieck – Lernerfolgskontrolle

M 11

Aufgaben

1. Ein Schattenstab, welcher senkrecht in den Boden gesteckt wurde, ragt 1 Meter über den Boden hinaus und wirft einen 1,50 Meter langen Schatten.
   a) Fertige eine Skizze an und berechne den Einfallswinkel der Sonne.
   b) Wie hoch ist ein Baum, der zur gleichen Zeit einen 12,75 Meter langen Schatten wirft? Notiere den Lösungsweg.
2. Der *Tokyo Skytree* in der japanischen Hauptstadt (35° 41′ N ; 139° 46′ 0) ist mit 634 Metern Höhe der höchste Fernsehturm der Welt.
   (Zum Vergleich: geografische Breite des nördlichen Wendekreises ≈ 23,4°)
   Welche Aussagen sind zutreffend? Setze „X".
   A ☐ Am Mittag des 21. Juni wirft der *Tokyo Skytree* keinen Schatten.
   B ☐ Wenn der Einfallswinkel der Sonne 45° erreicht, gleicht die Länge des Schattens der Höhe des Turms.
   C ☐ Am Mittag des längsten Tages des Jahres ist der Schatten des *Tokyo Skytree* am längsten.
   Die Schattenlänge s des *Tokyo Skytree* am Mittag des längsten Tages des Jahres kann mit der Gleichung
   D ☐ $s = 634\text{ m} \cdot \tan(35{,}7°)$
   E ☐ $s = \dfrac{634\text{ m}}{\tan(35{,}7°)}$
   F ☐ $s = \dfrac{634\text{ m}}{\tan(12{,}3°)}$
   G ☐ $s = \dfrac{634\text{ m}}{\tan(77{,}7°)}$ berechnet werden.

© Wikimedia Commons / Kakidai, CC BY-SA 3.0

3. Nicht etwa in den Alpen, sondern in einem kleinen Ort in Thüringen befindet sich die steilste Straße Deutschlands. Die 300 Meter lange *Oberweißbacher Straße* in *Deesbach* (Landkreis Saalfeld-Rudolstadt) hat eine Steigung von 25,3 Prozent.
   Unter welchem Winkel steigt die Straße durchschnittlich an?
4. Die *Pilatusbahn* ist eine Zahnradbahn in der Schweiz. Die Bahn fährt auf einer 4,618 km langen Schmalspurstrecke bei einer durchschnittlichen Steigung von etwa 38 Prozent. Die maximale Steigung von 48 Prozent macht sie zur steilsten Zahnradbahn der Welt.
   Welchen Höhenunterschied überwindet die Bahn auf der Gesamtstrecke?
5. Der Graph einer linearen Funktion verläuft durch die Punkte A(1|–1) und B(3|2).
   Berechne den Schnittwinkel der Funktionsgeraden mit der x-Achse.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Wenn die Sonne im Zenit steht

1. **Tipp**: Das Recherchieren im Internet kann – Internetzugang im Fachraum vorausgesetzt – während der Unterrichtsstunde in selbstständiger Schülertätigkeit ausgeführt oder als vorbereitende Hausaufgabe erteilt werden.
   Steckbrief
   Der Turm des „Equator Line Monuments Quitsato" dient als Gnomon (griech. γνϖμων = Schattenzeiger) einer riesigen Sonnenuhr. Das Monument wurde im Jahr 2006 in Ecuador nahe der Stadt Cayambe 47 km nördlich von Quito erbaut. Dieses kulturelle Denkmal markiert (mit nur vier Metern Abweichung) den Äquator. Hier steht die Sonne jährlich zweimal im Zenit.
2. Bei senkrechtem Schattenwurf ist das Schattenbild kongruent zum Original. Der Schatten entsteht genau (senkrecht) unter dem Original.
3. Wegen der großen Entfernung der ausgedehnten Lichtquelle *Sonne* von der Erde fallen die Sonnenstrahlen annähernd parallel auf die Erde. Steht die Sonne über einem Ort auf der Erde im Zenit, treffen ihre Strahlen nahezu parallel und senkrecht auf den Gegenstand, das Schattenbild entsteht durch senkrechte Parallelprojektion.
4. Geografische Koordinaten von Singapur:
   geografische Breite 1° 17′ 0′′ N,
   geografische Länge 103° 50′, 0′′ O.
   Die geografische Breite bedingt den Sonnenstand.
5. Die Sonne erreicht in dem Gürtel zwischen nördlichem (23° 26′ 05′′ N) und südlichem Wendekreis (23° 26′ 05′′ S) am Mittag des Tages der jeweiligen Sonnenwende den Zenit. Diese Zone wird auch als die *Tropen* bezeichnet.

M 2 Schatten des Equator Line Monuments

1. Die Auswertung zum Vergleich der Zeichnungen erfolgt mittels **Lösungsfolie M 6.**
2. Fragestellungen / mathematische Aufgaben

a) allgemein verbal	b) Ansatz mit gegebenen und gesuchten Größen
Berechne die Länge des Schattens des *Equator Line Monuments* bei bekannter Höhe des Monuments und bekanntem Sonnenstand.	Geg.: $\overline{BC} = a$ α Ges.: $\overline{AC} = b$
Berechne den Einfallswinkel der Sonne, wenn die Turmhöhe und die Länge des Turmschattens bekannt sind.	Geg.: $\overline{BC} = a$ $\overline{AC} = b$ Ges.: α
Ermittle die Höhe des *Equator Line Monuments* bei bekannter Länge seines Schattens und bei bekanntem Sonnenstand.	Geg.: $\overline{AC} = b$ α Ges.: $\overline{BC} = a$