

## Auf den Spuren von Leibniz – die Differenzialrechnung anwenden

Doris Walkowiak, Görlitz

Anstieg der Sekante:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 24.88$

Anstieg der Tangente:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 13.33$

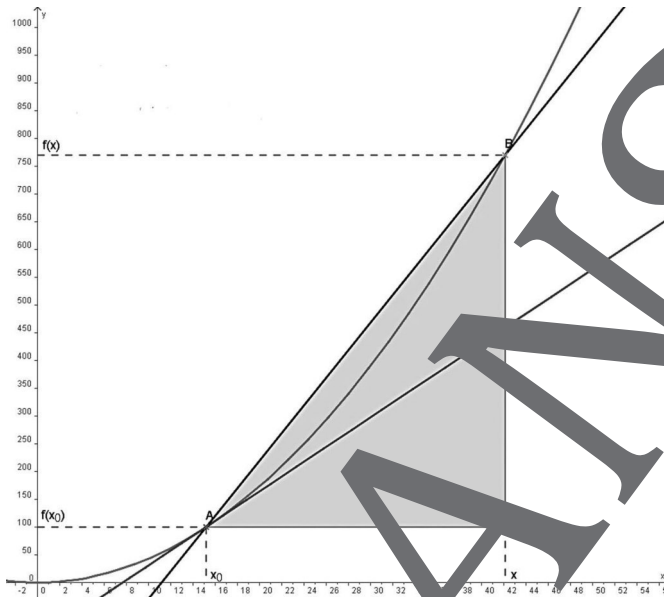


Foto: picture-alliance / dpa

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), einer der bedeutendsten Mathematiker und Philosophen des 17./18. Jahrhunderts

Gipsbüste, Leibniz Bibliothek Hannover

<b>Klasse</b>	11 und 12 (G8)
<b>Dauer</b>	7 Stunden
<b>Inhalt</b>	Differenzenquotient; Differenzialquotient; Faktor-, Summen- und Potenzregel; GTR; Eigenschaften von Funktionen; mathematische Modellierung; Ableitung im Kontext von Physik und Wirtschaft
<b>Ihr Plus</b>	GEONExT-Dateien und Excel-Tabellen

Das mathematische Wissen anwenden und damit Probleme aus unterschiedlichsten Bereichen lösen zu können, sind zentrale Anforderungen an unsere Schülerinnen und Schüler. Gerade die Differenzialrechnung bietet vielfältige Ansätze für problemorientiertes, fachübergreifendes und praxisnahes Arbeiten.

Nicht nur in der Physik, wo man die Bewegungsgesetze herleiten kann, spielt die Differenzialrechnung eine Rolle. Auch in der Wirtschaft zur Berechnung von Grenzkosten oder zur Maximierung des Gewinns, in der Natur bei Wachstums- und Zerfallsprozessen, im Bauwesen bei der Geländegestaltung oder zur Ermittlung des Materialbedarfs kann man auf die Differenzialrechnung nicht verzichten.

Das vorliegende Material gibt hierzu einige Anregungen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Dem Problemlösen als überfachlicher Kompetenz kommt in der Mathematik gerade in der Sekundarstufe 2 eine besondere Bedeutung zu. Dabei geht es darum, problematische Aufgaben zunächst zu erfassen und zu beschreiben. Anschließend wendet man Problemlösungsstrategien für deren Lösung an. Die Lösung hinterfragt man kritisch und motiviert die gegebenenfalls. Dies erfordert umfangreiches fachübergreifendes Wissen und die Fähigkeit zu komplexem und logischem Denken.

Dabei spielt insbesondere die Modellbildung eine große Rolle. Praktische Sachverhalte muss man auf ihren mathematischen Kern reduzieren, Lösungsansätze bestätigen oder auch verwerfen und die Ergebnisse kritisch bewerten.

Darüber hinaus lernen die Schülerinnen und Schüler in diesem Beitrag, die ihnen zur Verfügung stehenden Informationsquellen und Hilfsmittel wie Lehrbücher, Internet, grafischen Taschenrechner (GTR) und Excel-Tabellen, zielgerichtet einzusetzen.

### Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien

Fast alle Materialien dienen der Festigung und Anwendung, setzen also voraus, dass Sie die entsprechenden Inhalte vorher verstanden haben. Die Ausnahme bilden die Materialien M 1 und M 2, die für die Erarbeitung (bzw. Wiederholung) des Differenzen-/Differenzialquotienten gedacht und als Selbstlerneinheit konzipiert sind. Zur grafischen Veranschaulichung empfiehlt sich ein Computer.

Die vorliegenden GEONEX-Dateien wurden mit Version 1.73 erstellt und können direkt als HTML-Datei in einem gängigen Browser (z.B. Firefox, Chrome, Safari, Opera, Java-Plattform) geöffnet werden. Dazu muss sich die Datei *geonext.jar* in denselben Ordner wie die Beispiele befinden.

Bei allen Materialien wird der sichere Umgang mit dem grafischen Taschenrechner (GTR), z.B. bei der Bestimmung von Extrema, Ableitungen, Integralen, Tangenten, ... und beim Lösen von Gleichungen, vorausgesetzt (hier verwendet: TI-84).

### Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Zentrale Leitidee der Klassenstufen 11 und 12 ist der funktionale Zusammenhang. Die Schülerinnen und Schüler vertiefen und erweitern ihre Kenntnisse durch die Einführung weiterer Funktionsklassen, Begriffe und Arbeitsweisen.

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler ...	Anforderungsbereich
K 2, K 3, K 4, K 5	L 4	<p>... erstellen ein mathematisches Modell und wenden ihr Wissen über Funktionen an, um komplexe, realitätsnahe Aufgaben (auch aus anderen Fachgebieten) zu lösen,</p> <p>... bestimmen Eigenschaften von Funktionen rechnerisch und mithilfe des GTR,</p> <p>... lösen auch Gleichungen mit dem GTR, um Problemlöseverständnis zu entwickeln und nicht nur schematisch umfangreiche Rechnungen durchzuführen.</p>	II, III

<b>Reihe 11</b> S 3	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

### Abkürzungen

#### Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischer, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

#### Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

#### Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

### Minimalplan

Der Zeitumfang für die Bearbeitung der Materialien beträgt in der Regel 45 Minuten, hängt aber stark von den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ab. Problemorientierte Aufgaben zu lösen.

Mit Ausnahme der Materialien M 1 und M 2 kann jede Aufgabe bzw. Beispiele losgelöst voneinander bearbeiten. Damit sind sie auch gut zur Binnendifferenzierung geeignet.

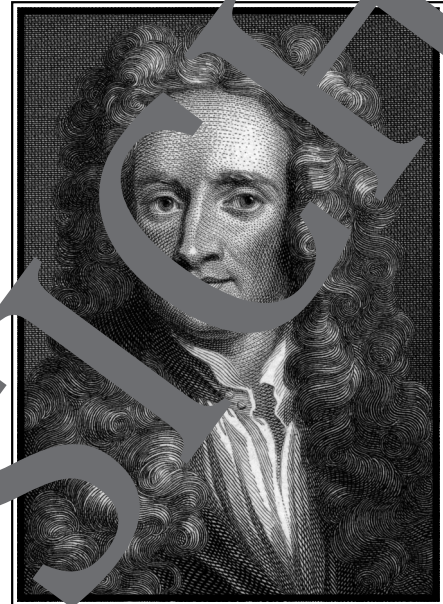
### Auf einen Blick

Material	Thema
M 1	<b>Von der Durchschnitts- zur Momentangeschwindigkeit – Differenzen- und Differenzquotient</b> Einstieg über einen Begriff aus der Physik, die Momentangeschwindigkeit
M 2	<b>Differenzen- und Differenzquotient auf einen Blick</b> Wiederholungsblatt
M 3	<b>Im Gelände – die 1. Ableitung anwenden</b> Einstieg, Anwendung, Tangentengleichungen bestimmen, Potenz- und Wurzelfunktionen ableiten
M 4	<b>Mal langsam und mal schnell – Ableitungen in der Physik</b> Gleichmäßig beschleunigte Bewegung, harmonische Schwingung eines Fadenspendels, Potenz- und Winkelfunktionen ableiten, Kettenregel
M 5	<b>Minimum und Maximum – Extremwertaufgaben lösen</b> Kraftstoffverbrauch optimieren, Straßen und Geländestücke planen
M 6	<b>Kosten und Gewinne – Aufgaben aus der Wirtschaft</b> Grenzkosten berechnen, Cournot-Punkt bestimmen, Potenzfunktionen ableiten, Extremwertaufgaben lösen
M 7	<b>Überall Veränderungen – die Differenzialrechnung anwenden</b> Extremwertaufgaben, quadratische Regression mit GTR, waagerechter Wurf

## M 1 Von der Durchschnitts- zur Momentangeschwindigkeit – Differenzen- und Differenzialquotient

Achtung Geschwindigkeitskontrolle! Der Fahrer des weißen VW Golf, der gerade noch mit 130 Sachen auf der Landstraße gerast ist, tritt kräftig auf die Bremse. Doch es ist zu spät – schon blitzt es. Das wird teuer!

Schon 1671 beschäftigte sich Newton mit der Momentangeschwindigkeit und entwickelte etwa zeitgleich mit Leibniz die Differenzialrechnung.

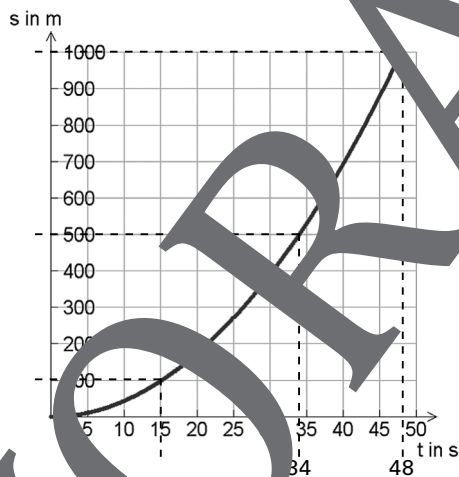


Sir Isaac Newton (1643 – 1727)

Foto: picture-alliance / Mary Evans Picture Library

### Aufgaben

- Wie kann man die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges bestimmen?
- Ein Pkw legt eine Messstrecke von 1000 m in 48 s zurück.
  - Berechnen Sie seine Geschwindigkeit in km/h.
  - Für die in a) angegebene Strecke ist eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 80 km/h vorgeschrieben. Hat der Fahrer diese Geschwindigkeit gehalten? Begründen Sie.
- Das folgende Weg-Zeit-Diagramm stellt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung dar.



- Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit im Abschnitt von 100 m bis 1000 m bzw. von 100 m bis 500 m.

**Tip** Lesen Sie die Werte aus dem Diagramm ab.

- Zeichnen Sie die Anstiegsdreiecke und die zugehörigen Geraden in das Diagramm. Wie nennt man diese Geraden?

- Anstelle der Durchschnitts- soll die Momentangeschwindigkeit am 100-m-Messpunkt bestimmt werden. Wie lässt sich eine möglichst genaue Messung realisieren? Zeichnen Sie die zugehörige Tangente  $t$  ein. Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit mithilfe des Anstieges der Tangente  $t$  bei  $s = 100$  m.

**Tip** Ein zweiter Punkt der Tangente ist (45|480).



Radargerät

Foto: Pixelio, Paul-Georg Meister

## M 3 Im Gelände – die 1. Ableitung anwenden

### Aufgaben

1. In einem Offroad-Park möchte man Parcours verschiedenster Schwierigkeit anbieten. Eine der Geländeerhebungen soll von links nach rechts durchfahren werden und folgende Form haben:



Dabei soll die Auffahrt einen Neigungswinkel von  $40^\circ$  und die Abfahrt einen Neigungswinkel von  $20^\circ$  nicht überschreiten.

Die beiden Abschnitte lassen sich durch folgende Funktionen beschreiben:

$$(1) f_1(x) = 0,05 \cdot x^2$$

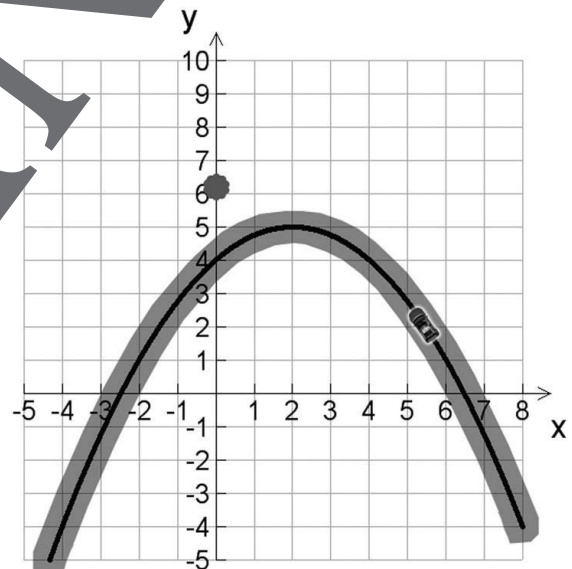
$$(2) f_2(x) = 3,2 - 0,01 \cdot (x - 9)^2$$

- a) Stellen Sie die beiden Funktionen in einem Koordinatensystem dar.  
b) Überprüfen Sie mit Ihrem GTR, ob die Bedingung für die Neigungswinkel erfüllt ist.

2. Die Fahrspur einer Straße in einer scharfen Kurve kann man annähernd durch die Funktion  $f(x) = 0,05 \cdot (5x - 1)^2$  beschreiben.

Auf glatter Straße kommt ein Pkw ins Rutschen und landet in einem Busch, der sich im Punkt  $(6,25)$  befindet.

An welcher Stelle hat das Fahrzeug die Fahrspur verlassen?



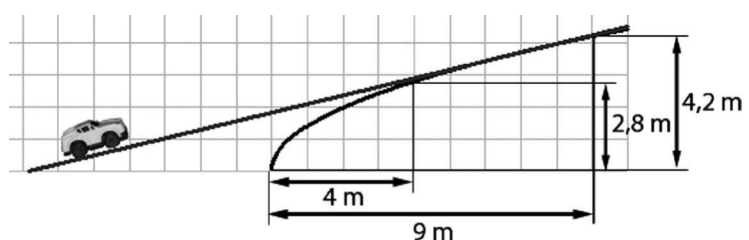
### Tipp

Beachten Sie dabei die beiden möglichen Richtungen.

3. An einer Böschung soll eine Rampe angeschüttet werden, deren Neigung  $15^\circ$  beträgt.

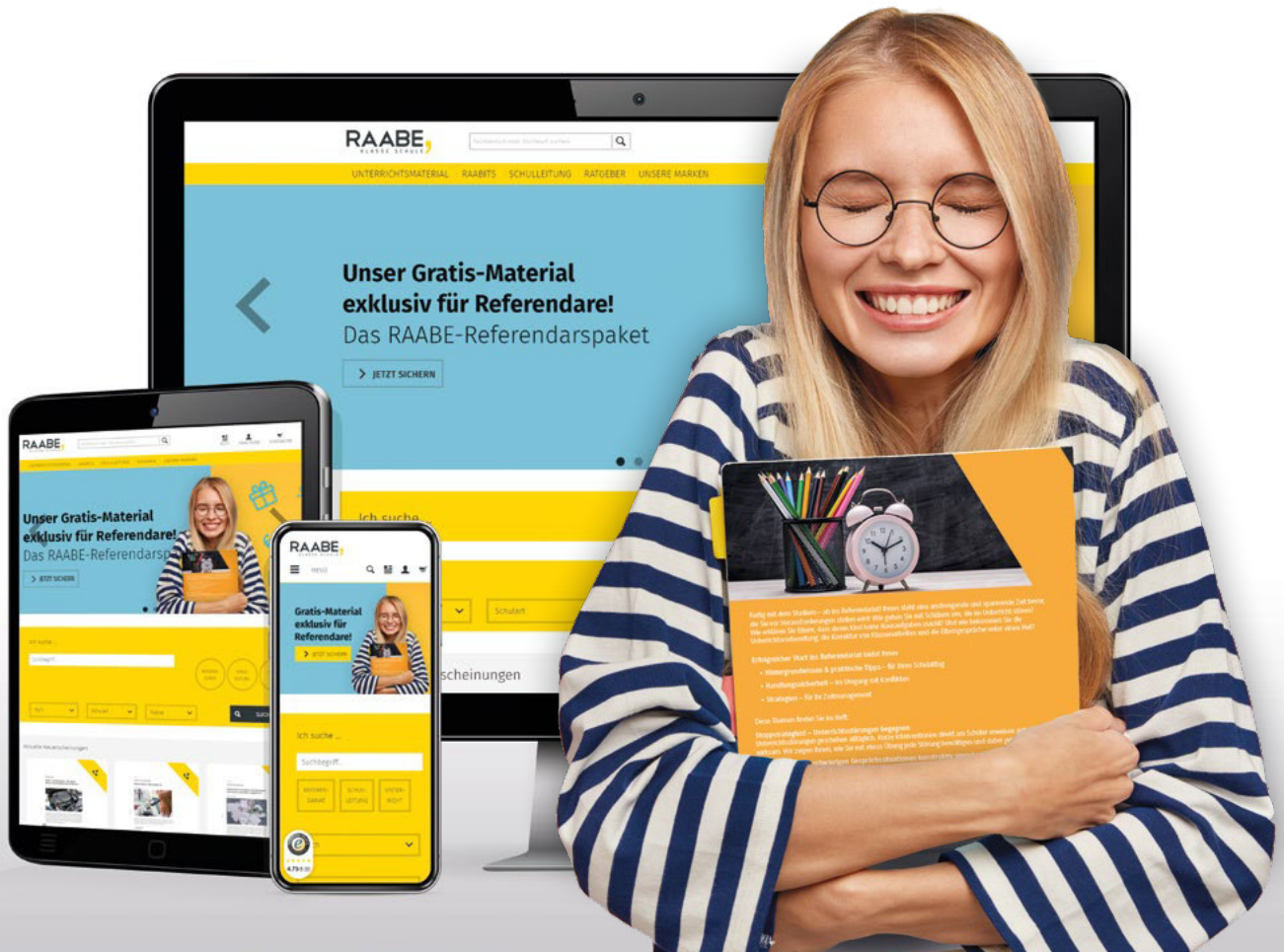
- a) Um welchen Funktionstyp handelt es sich? Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und zeichnen Sie die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.

- b) Bestimmen Sie den Start- und den Endpunkt der Rampe und berechnen Sie ihre Länge.



# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 4.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Sichere Zahlung** per Rechnung,  
PayPal & Kreditkarte



**Exklusive Vorteile für Abonnent\*innen**

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



**Käuferschutz** mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**