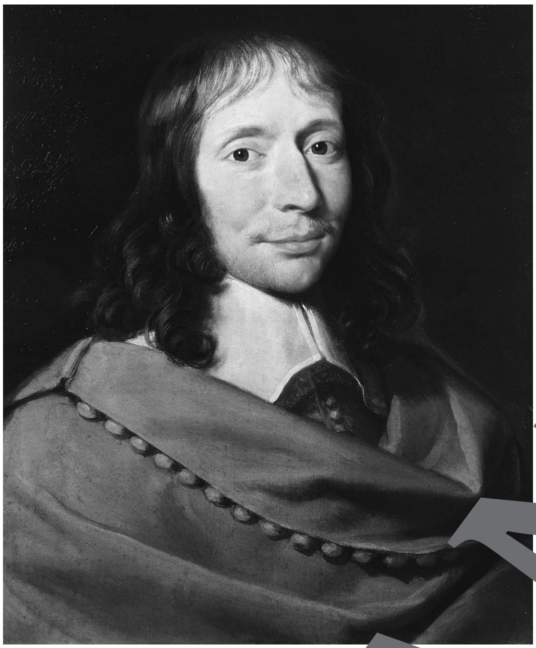
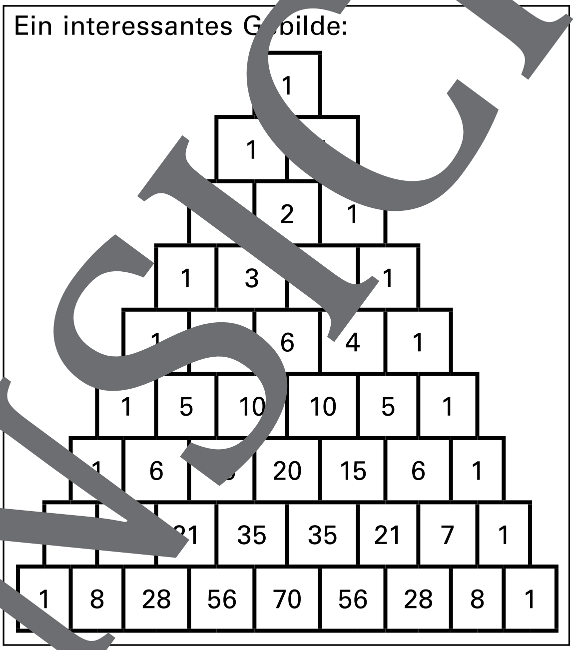
Das Pascal'sche Dreieck – Übungen zu arithmetischen Beziehungen und Zahlenmustern

Anne Forell, Paderborn



© akg / De Agostini Pict. Lib.

Blaise Pascal (1623–1662)



Ein interessantes Gebilde:

Das Pascal'sche Dreieck

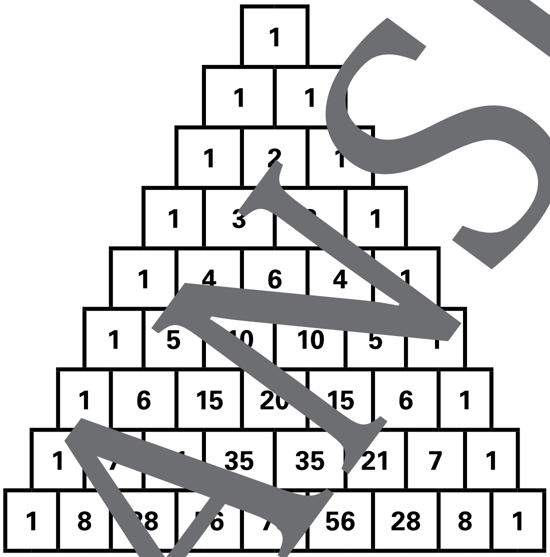
Klasse:	5
Dauer:	5 Stunden
Inhalt:	Aufspüren, Erklären und Beschreiben von Zahlenmustern und arithmetischen Beziehungen
Ihr Plus:	Einsatz der Materialien auch als **Lerntheke** möglich

Das Finden von Mustern und Strukturen in unbekannten Zusammenhängen ist eine zentrale mathematische Tätigkeit. Ähnlichkeiten, Veränderungen und Beziehungen zwischen Zahlen wahrzunehmen und die dahinterliegenden Strukturen aufzudecken, ist jedoch eine anspruchsvolle kognitive Leistung. Fördern Sie die Fähigkeit dazu durch Aufbau eines aktiven Wahrnehmungsverhaltens sowie Erwerb eines fundierten Zahlenwissens und übertragbarer struktureller Erfahrungen. Das Pascal'sche Dreieck eignet sich dazu im Sinne eines problemorientierten Mathematikunterrichts.

Didaktisch-methodische Hinweise

Fachlicher Hintergrund

Das **Pascal'sche Dreieck** ist nach dem Mathematiker und Philosophen **Blaise Pascal** (1623–1662) benannt, der sich ausgiebig mit diesem Gebilde beschäftigt hat. Beginnend von oben werden zeilenweise Kästchen angeordnet. Jede neue Zeile enthält ein Kästchen mehr, sodass eine dreiecksähnliche Struktur entsteht. Das oberste Kästchen wird mit der „Eins" (oder einer anderen beliebigen Zahl) gefüllt. Die übrigen Kästchen enthalten die Ausgangszahl (meist eine 1), wenn sie am Rand stehen, oder gerade die Summe der beiden Kästchen, die jeweils direkt diagonal links und rechts über ihnen liegen. Wird diese Rechenvorschrift fortlaufend angewandt, ergibt sich ein mit Zahlen versehenes Dreieck, das beliebig nach unten verlängert werden kann:



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Das Pascal'sche Dreieck eignet sich für eine Fülle von Aktivitäten, wie Aufspüren, Beschreiben und Erklären von Zahlenmustern (**M 2**) und arithmetischen Beziehungen (**M 5**, **M 6**). Es fördert Kreativität und ermöglicht – im Sinne guter Lernaufgaben – Entdeckungen auf unterschiedlichen Niveaus. Zudem wiederholen die Schüler – in sowohl produktiver als auch automatisierender Weise – Rechentechniken, die sie bereits erlernt haben, und erweitern diese (**M 3**).

Durch die Auseinandersetzung mit den verschiedenen Lernangeboten bringen Sie Ihren Schülern den strukturellen Aufbau des Pascal'schen Dreiecks nahe und lassen sie Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und begründen.

Verlauf

Zum Einstieg in die Unterrichtseinheit stellen Sie Ihren Schülern den berühmten Mathematiker und Philosophen **Blaise Pascal** (1623–1662) vor (**M 1**). Vielen Schülern ist nicht bewusst, dass Mathematik etwas geschichtlich Gewachsenes ist und viele mathematische Phänomene schon vor Hunderten von Jahren von genialen Mathematikern entdeckt wurden. Es wird Ihre Schüler interessieren, dass diese mathematische Aufgabenstellung einer realen, historischen Person zugeschrieben wird.

Ich-Du-Wir nach Gallin und Ruf (2005)

Anschließend zeigen Sie Ihren Schülern das nach Blaise Pascal benannte *Pascal'sche Dreieck*. Kopieren Sie dazu Material **M 2** und teilen Sie es an Ihre Schüler aus. Diese sollen zunächst die Bildungsregel erkennen und anwenden, indem sie die fehlenden Zeilen ergänzen. Im zweiten Schritt notieren sie, welche Muster und Auffälligkeiten sie [illegible] Pascal'schen Dreieck finden. Nach einer individuellen Auseineinandersetzung mit dem Pascal'schen Dreieck tauschen sich die Schüler mit einem Partner über ihre gemachten Entdeckungen aus. In einem sich anschließenden Unterrichtsgespräch über [illegible] vielen Eigenschaften des Pascal'schen Dreiecks tragen die Schüler ihre Ergebnisse zusammen.

Lerntheke – lassen Sie Ihre Schüler selbstständig arbeiten!

Die Materialien **M 3–M 8** bauen inhaltlich nicht aufeinander auf, sodass Ihre Schüler sie selbstständig in Form einer **Lerntheke** bearbeiten können. Um den Aufbau des Pascal'schen Dreiecks jedoch besser zu verstehen, eignen sich die Materialseiten **M 3** und **M 4** gut als Hinführung. In den Materialien **M 5–M 8** entdecken Ihre Schüler mathematische Phänomene und üben, diese zu beschreiben.

Den Aufbau des Pascal'schen Dreiecks kennenlernen

Material **M 3** zeigt ein ausgefülltes Pascal'sches Dreieck mit acht Zeilen, in dem sich vier Fehler eingeschlichen haben. Ihre Schüler werden durch die Angabe der Fehleranzahl motiviert, alle Fehler zu finden, und vertiefen – ganz nebenbei – den strukturellen Aufbau des Pascal'schen Dreiecks. Die Kontrolle erfolgt durch den Banknachbarn.

Notwendige Vorkenntnisse

Material **M 3** setzt das Verständnis des strukturellen Aufbaus des Pascal'schen Dreiecks voraus. Die Grundrechenarten Addition *und* Subtraktion müssen (im Kopf oder schriftlich) angewendet werden. Dieses Arbeitsblatt bietet sich gut als Hausaufgabe an, kann aber auch im Unterricht in Einzelarbeit bearbeitet werden.

Um die Motivation Ihrer Schüler zu erhalten, bauen Sie **spielerische Elemente** in Ihren Unterricht ein. Gleichzeitig fördern Sie so eine handelnde Auseinandersetzung mit der Struktur des Pascal'schen Dreiecks. Beim Versteckspiel (**M 4**) trainieren Sie die kognitiven und argumentativen Fähigkeiten Ihrer Schüler. Verwenden Sie Material **M 5** als Vorlage für ein **Puzzle**. Ihre Schüler kleben diese Vorlage zunächst auf etwas festeren Karton und zerschneiden [illegible] dann entlang der Kästchen sorgfältig in die einzelnen Puzzleteile. Dieses Puzzle setzen die Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit zusammen.

Phänomene entdecken und begründen (lernen)

Mit den Materialien **M 6–M 8** lassen Sie Ihre Schüler mathematische Phänomene entdecken und diese schriftlich versprachlichen. Da dies vielen Schülern nicht leichtfällt, gibt [illegible] Tipps. Ggf. ist vor dem Einsatz dieser Materialien eine gemeinsame Erarbeitung einer Teilaufgabe sinnvoll. Wählen Sie dazu Teilaufgabe a) und b) der jeweiligen Materialien aus und erarbeiten Sie daran exemplarisch den Sachverhalt gemeinsam mit Ihren Schülern. Diese Aufgaben eignen sich für Partnerarbeit, da der Austausch mit einem Partner das Versprachlichen arithmetischer Problemstellungen unterstützt.

Um Material **M 6** zu bearbeiten, müssen die Schüler ein ausgefülltes Pascal'sches Dreieck (z. B. **M 4**) als zusätzliches Hilfsmittel benutzen.

Ausblick

Als weiterführende Aufgabe bietet sich eine Auseinandersetzung mit einer Variation des Pascal'schen Dreiecks an. Füllen Sie das Pascal'sche Dreieck am Rand ausschließlich mit „Zweien" auf (**Vorlage auf CD-ROM 50**) und lassen Sie die fehlenden Zahlen von den Schülern nach den bekannten Regeln berechnen. Im Anschluss daran notieren die Schüler Auffälligkeiten, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum 1er-Dreieck. Darüber hinaus vergleichen die Schüler die Zeilensummen der beiden Dreiecke und überprüfen, ob sich die Fibonacci-Folge auch in einem 2er-Dreieck finden lässt. Abschließend wird es besonders motivierend für Ihre Schüler sein, ein Dreieck mit selbst gewählter Startzahl und eigenem Namen zu erstellen und daran Entdeckungen zu machen (**Vorlage auf CD-ROM 50**).

Zur Einführung der **binomischen Formeln** können Sie ebenfalls auf das Pascal'sche Dreieck zurückgreifen, da es die **Binomialkoeffizienten** enthält. Neben den **Dreieckszahlen** in der dritten Reihe tauchen in der vierten Reihe die **Tetraederzahlen** auf, mit denen sich der Zusammenhang herstellen lässt.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1, K 2, K 6	L1	... schulen ihre Rechenfertigkeit, vertiefen den strukturellen Aufbau des Pascal'schen Dreiecks und wenden Teilbarkeitsregeln an (**M 2, M 4, M 6**),	I, II
K 2	L1	... nutzen Rechengesetze und wenden die Grundrechenarten Addition und Subtraktion unter Berücksichtigung der strukturellen Vorgaben an (**M 3, M 5, M 7**),	I, II
K 1, K 2, K 6	L 1	... erkennen Zahlenfolgen und die zugrunde liegenden Algorithmen und wenden diese an (**M 7, M 8**).	I-III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

Literaturhinweis

Eine gute, auch für Kinder lesenswerte Darstellung ist das Kapitel „Die siebente Nacht" in **„Der Zahlenteufel – ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben"** von H. M. Enzensberger (Deutscher Taschenbuchverlag, München), in dem das Thema *Pascal'sches Dreieck* interessant aufbereitet ist.

Auf einen Blick

(HA) ≙ Hausaufgabe

Material	Thema	Stunde
M 1	**Wer war Blaise Pascal? – Die wichtigsten Lebensdaten** Biographische Informationen zu Blaise Pascal	(HA)
M 2	**Das Pascal'sche Dreieck kennenlernen** Regelmäßigkeiten und Besonderheiten des Pascal'schen Dreiecks entdecken; das Dreieck fortsetzen	[illegible]
M 3	**Fehler finden und fehlende Zahlen ergänzen** Die Struktur des Dreiecks genauer untersuchen; den Umgang mit dem Dreieck üben	2.
M 4	**Versteckspiel – verdeckte Zahlen berechnen und begründen** Den Umgang mit dem Pascal'schen Dreieck üben	3.
M 5	**Das Pascal'sche Dreieck – ein Puzzle** Einzelteile des Dreiecks korrekt zuordnen ❒ Bauklotz-Würfel (www.winklerschulbedarf.com; 100 Stück kosten 6,30 €) ❒ fester Karton ❒ Schere ❒ Klebstoff	(HA)
M 6	**Das ist auffällig – Besonderheiten entdecken** Arithmetische Folgen erkennen und beschreiben	4.
M 7	**Das hat sich was versteckt! – Muster erkennen** Die Fibonacci-Folge mit dem Pascal'schen Dreieck erarbeiten	5.
M 8 (Fo)	**Die Fibonacci-Folge im Pascal'schen Dreieck** Farbfolie zu [illegible] M 7	

Minimalplan

Die biografischen Informationen zu Blaise Pascal lesen die Schüler als Hausaufgabe.

Die Materialien M 3–M 8 sind voneinander unabhängig. Bei Zeitnot führen Sie das Pascal'sche Dreieck mit Material M 2 ein und wählen dann eines der Materialien M 3–M 8 aus.

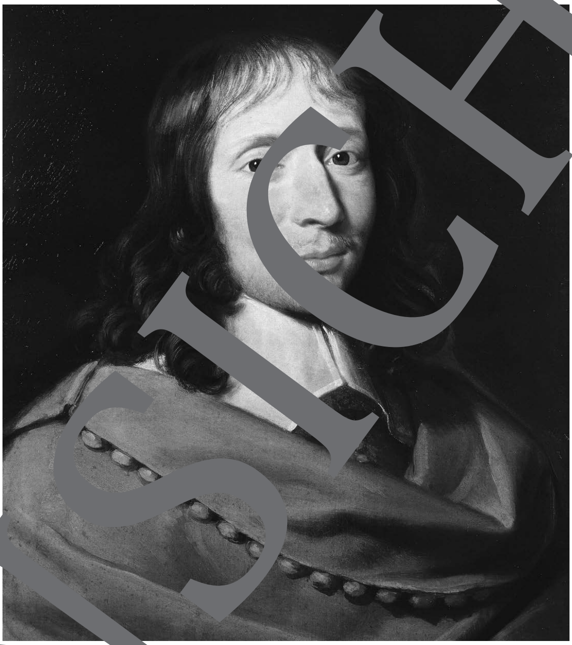
M 1 Wer war Blaise Pascal? – Die wichtigsten Lebensdaten

Blaise Pascal war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph.

Er wurde am 19.6.1623 in Clermont-Ferrand in Frankreich geboren. Im Alter von 39 Jahren erkrankte er schwer und starb an den Folgen seiner Erkrankung.

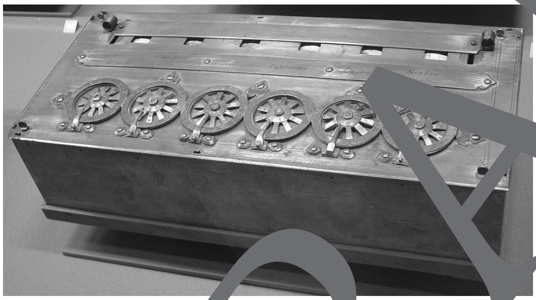
Weil Pascal schon als Kind sehr kränklich war, wurde er von seinem hoch gebildeten Vater und von Hauslehrern unterrichtet. Als Pascal acht Jahre alt war, zog die Familie nach Paris, wo Pascal viele Gelehrte, Mathematiker und Naturforscher seiner Zeit kennenlernte.

Schon im Alter von 16 Jahren verfasste er eine Arbeit über Kegelschnitte.



© akg / De Agostini Pict. Lib.

[illegible] (1623–1662)



© 2005 David Monniaux

Pascaline aus dem Jahr 1652

In den Jahren 1642–1644 arbeitete der junge Mathematiker an der Erfindung einer mechanischen Rechenmaschine für die Addition und Subtraktion. Diese ***Pascaline*** sollte seinem Vater die Arbeit als Steuereinnehmer erleichtern und war eine der ersten mechanischen Rechenmaschinen überhaupt. In den Jahren 1647 und 1648 beschäftigte er sich mit der Physik und verfasste eine Abhandlung über den Luftdruck. Noch heute messen wir Luftdruck in der Einheit ***Pascal***, die nach ihm benannt wurde.

Im Jahr 1654 veröffentlichte er seine Arbeit über [illegible] nach ihm benannte ***Pascal'sche Dreieck***. Die Besonderheit dieses Dreiecks besteht darin, dass sich durch Addition zweier nebeneinanderstehender Zahlen die in dem Kästchen darunterstehende Zahl ergibt. Mit diesem Dreieck lässt sich zudem eine Vielzahl an mathematischen Zusammenhängen beweisen und entdecken.

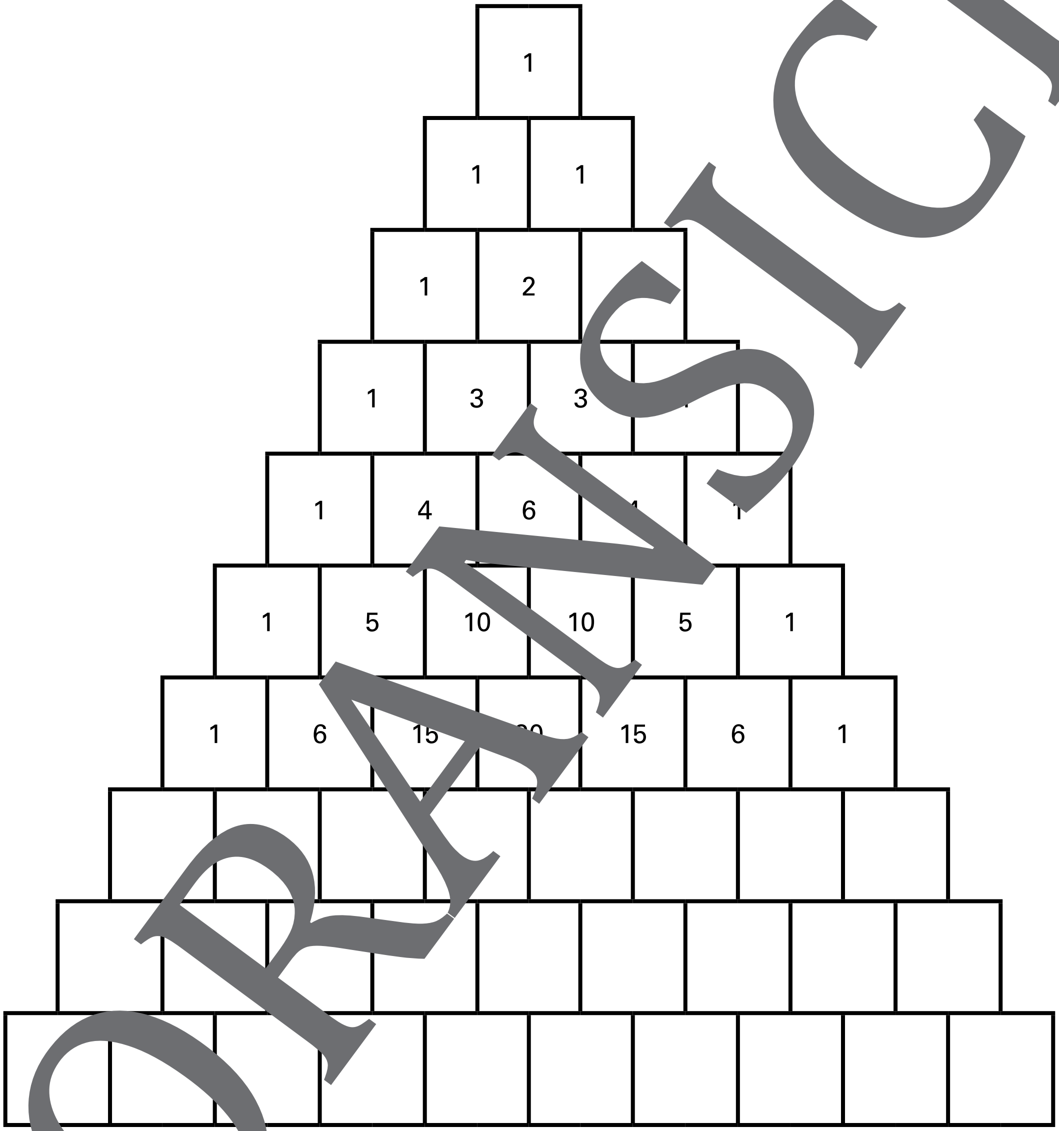
Viele seiner über 350 Jahre alten Entdeckungen haben bis heute Relevanz.

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Das Pascal'sche Dreieck

M 2 Das Pascal'sche Dreieck kennenlernen

Das Pascal'sche Dreieck ist ein Gebilde, das sich immer weiter fortsetzt. Um zu verstehen, welche Auffälligkeiten und Regelmäßigkeiten in diesem besonderen Dreieckskonstrukt stecken, sieh es dir genau an.



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Aufgaben

1. Sieh dir die Spitze des Dreiecks an. Welche Besonderheiten fallen dir auf?
2. Beschreibe, welche Regelmäßigkeit zwischen zwei übereinanderliegenden Zeilen besteht. Finde heraus, wie die einzelnen Zahlen aus den Zahlen der darüberliegenden Zeile entstehen.
3. Berechne die fehlenden Werte der noch leeren Felder. Ergänze damit das Pascal'sche Dreieck.

   Besprich dein Ergebnis mit deinem Banknachbarn.

M 3 Fehler finden und fehlende Zahlen ergänzen

Aufgaben

1. Finde die (vier!) Fehler, die sich in diesem Pascal’schen Dreieck einges[illegible]hlichen ha[illegible]

0							
1	1						
1	2	1					
1	5	3	1				
1	4	[illegible]	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	[illegible]	15	6	1	
2	7	21	[illegible]	36	21	7	1

2. Hier fehlt etwa[illegible] Set[illegible] die fehlen[illegible] Zahlen ein.

a)

	1			
1		1		
1	3		1	
1	4			1

b)

1	3	3	1		
1	5				1

c)

1	10	45	120	210	252	210				

M 4 Versteckspiel – verdeckte Zahlen benennen und begründen

Aufgabe

Lege ein oder mehrere Plättchen auf beliebige Felder.

Dein Partner nennt die verdeckte Zahl und begründet auf mindestens zwei Wegen, welche Zahl verdeckt ist.

☐ ☐ ☐ 1 ☐ ☐ ☐

1 1

1 [illegible] 1

1 [illegible] 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 [illegible] 21 35 35 21 7 1

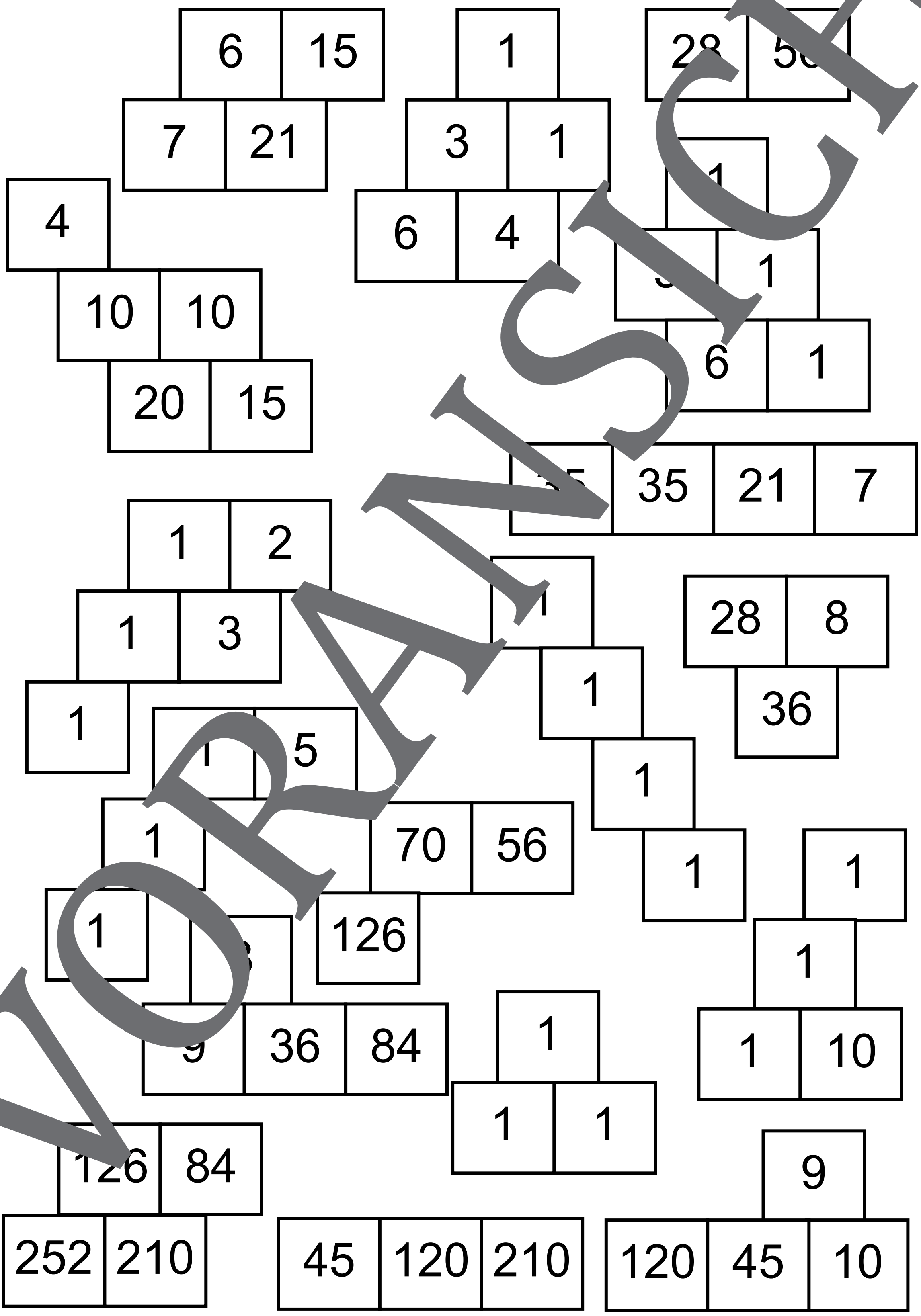
1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 [illegible] 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

M 5 Das Pascal'sche Dreieck – ein Puzzle

Schneide die einzelnen Teile des Pascal'schen Dreiecks aus und setze sie zu einem vollständigen Dreieck zusammen.



M 6 Das ist auffällig! – Besonderheiten entdecken

Materialien

❒ ein vollständig ausgefülltes Pascal'sches Dreieck (vgl. Material M 4)

Aufgabe 1

a) Addiere in jeder Zeile die Zahlen (bis zur 6. Zeile).

b) Was fällt dir an der Folge der Summen auf?

c) Wie geht es weiter? Schreibe nur die Ergebnisse auf.

Für Experten

Begründe, warum man diese Ergebnisse erhält.

Tipp 1

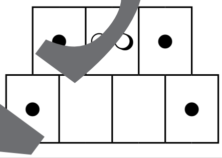
Hier ist die 2. und 3. Zeile des Pascal'schen Dreiecks abgebildet:

2. Zeile | 1 | 2 | 1 | Summe = 4
3. Zeile | 1 | 3 | 3 | 1 | Summe = 8

Tipp 2

Wie entsteht die Zahl 3? Male die entsprechenden Punkte in die Kästchen hinein.

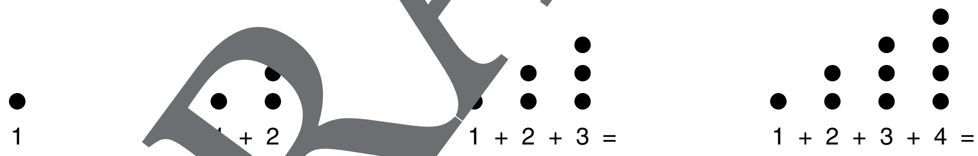
2. Zeile — Summe = 4
3. Zeile — Summe = 8



Tipp 3 Wo und wie oft kommt die Zahl 2 in der 3. Zeile vor?

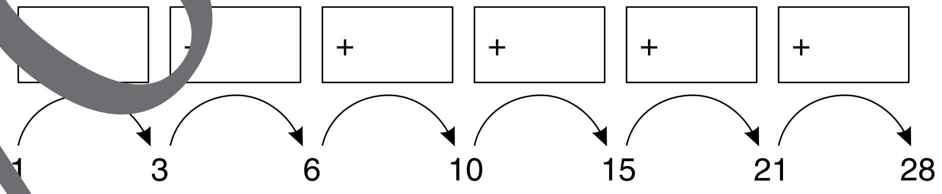
Aufgabe 2: Dreieckszahlen

a) Berechne die Summen und setze die Folge der Summen fort.



b) Finde im Pascal'schen Dreieck die Zahlenfolge, die mit den Ergebnissen aus a) beginnt. Setze sie bis zur 8. Zeile des Pascal'schen Dreiecks fort.

c) Hier ist eine Kettenaufgabe. Fülle die Kästchen aus. Wie lautet die Regel?



Für Experten

d) Begründe die entdeckte Regel.

e) Finde die Additions-Aufgaben aus a) im Pascal'schen Dreieck. Markiere alle Summanden in der zweiten Reihe des Pascal'schen Dreiecks. Wo findest du das Ergebnis im Pascal'schen Dreieck? Formuliere dazu eine Regel.

M 7 Da hat sich was versteckt! – Muster erkennen

Die hier entstehende Zahlenfolge heißt **Fibonacci-Folge**. Was ist das Besondere [illegible] dieser Zahlenfolge?

Aufgabe 1

a) Addiere alle Zahlen einer Farbe.

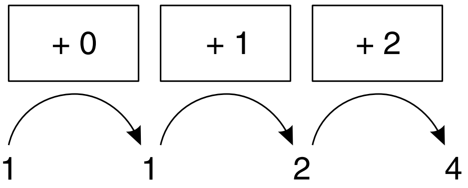
Schreibe die Aufgaben untereinander und mit Ergebnis auf.

b) Schreibe alle Ergebnisse, die du ermittelt hast, hintereinander auf (ohne die Aufgabe).

c) Was fällt dir auf? Beschreibe.

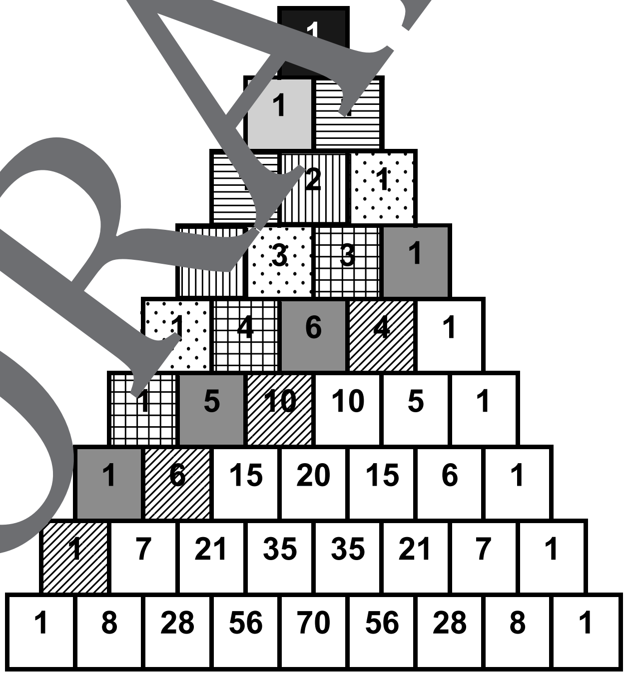
Tipp

Schreibe über die Ergebnisse in b) die Differenz der beiden Zahlen, z. B.



d) Wie geht es weiter? Berechne die nächste Zahl, [illegible] du die Regel aus c) anwendest.

e) Überprüfe deine Annahme, indem du die angrenzenden Zahlen im Pascal'schen Dreieck einfärbst und die Summe bildest.



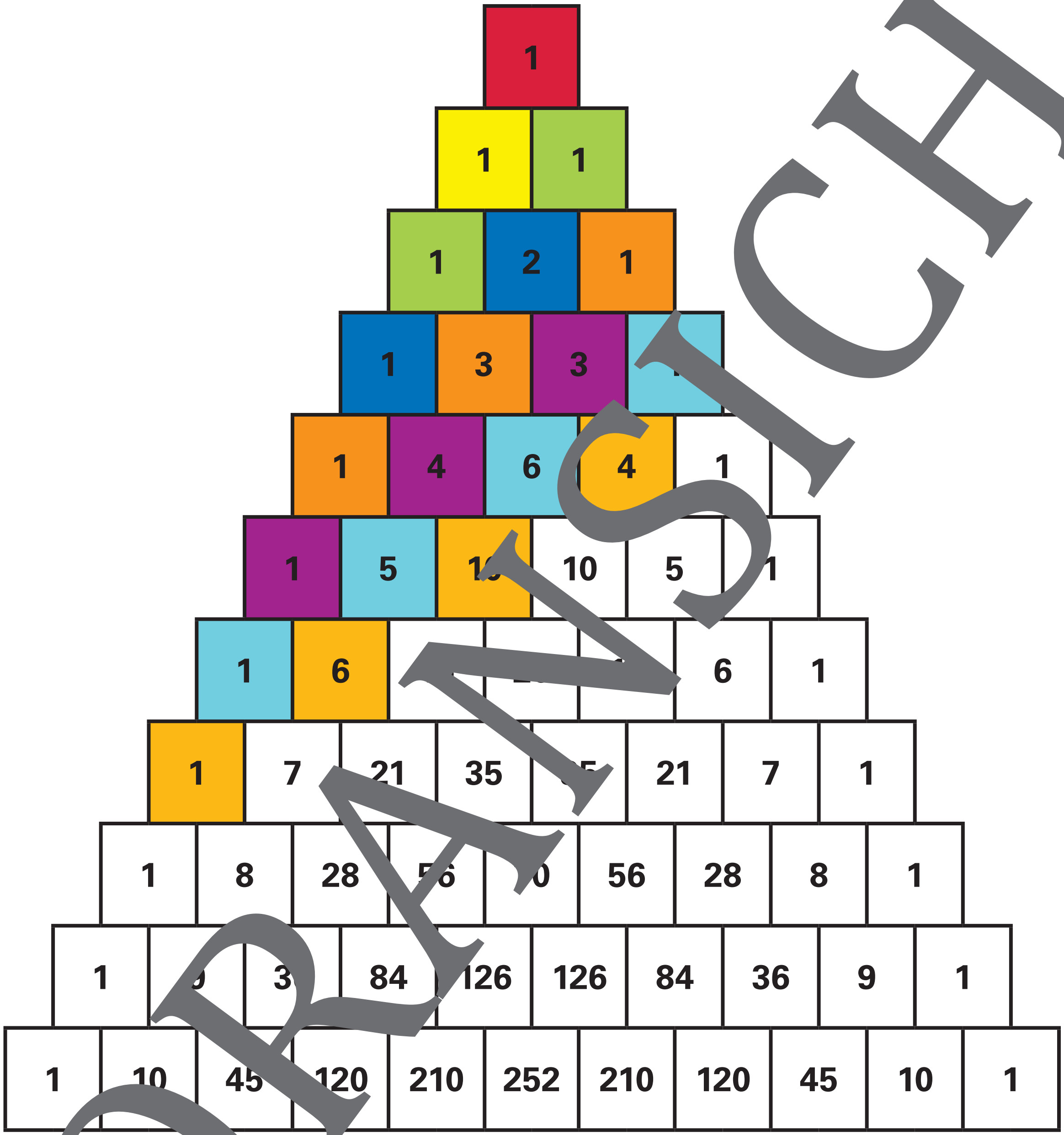
Aufgabe 2: Für die schnellen Mathematiker unter euch:

a) Färbe im Pascal'schen Dreieck alle geraden Zahlen mit einer Farbe.

Welches Muster entsteht?

b) Erkläre, wie es zu diesem Muster kommt.

M 8 Die Fibonacci-Folge im Pascal’schen Dreieck



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 [illegible] [illegible] [illegible] 6 1

1 7 21 35 [illegible] 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

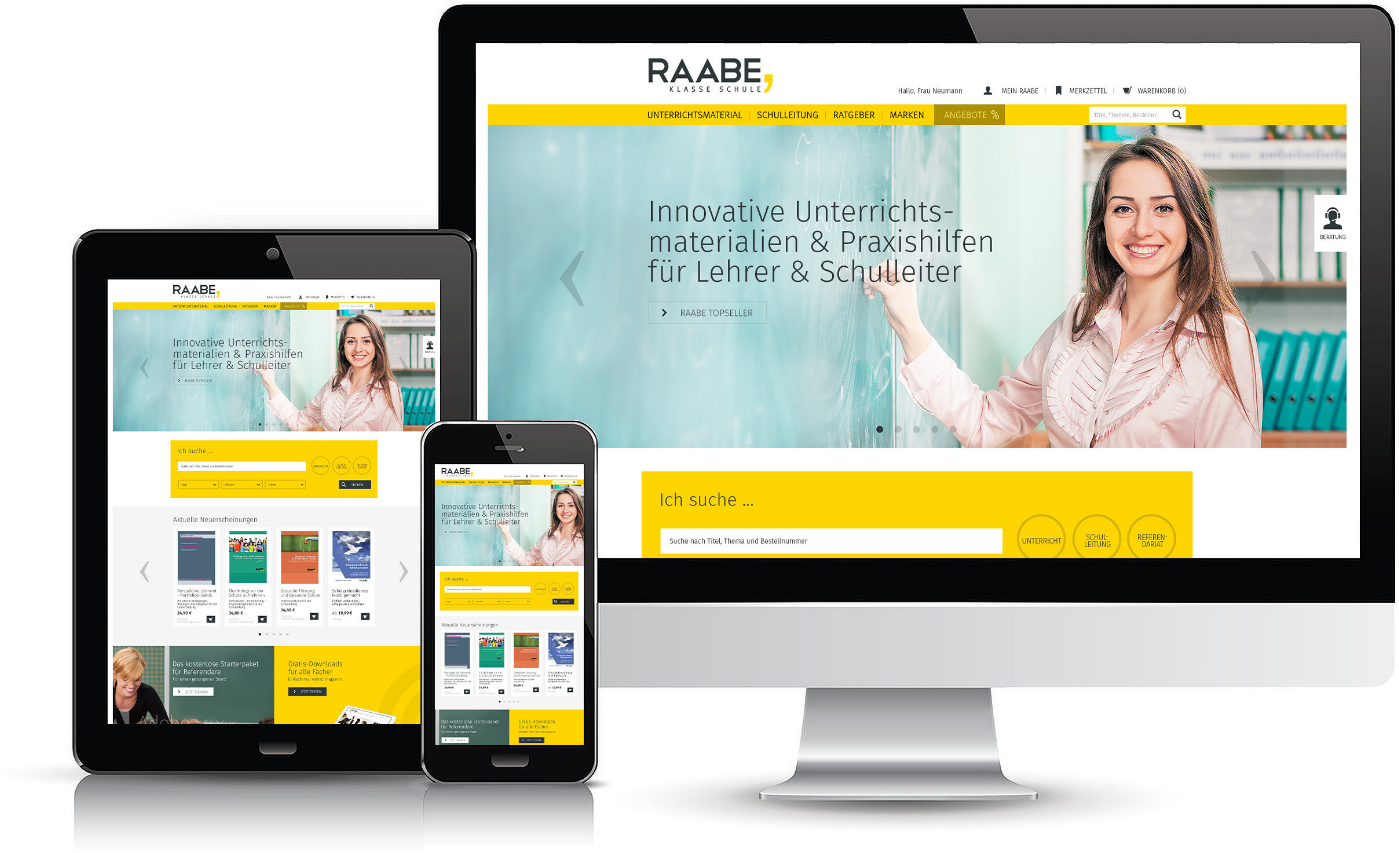
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Die Fibonacci-Folge

[illegible]	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Innovative Unterrichtsmaterialien & Praxishilfen für Lehrer & Schulleiter

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de