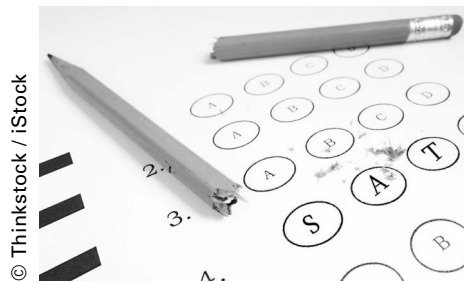


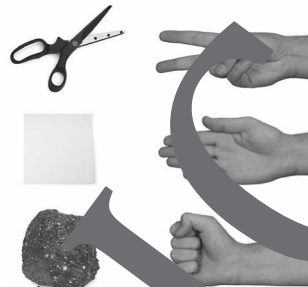
<b>Reihe 20</b> S 1	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

## Relative Häufigkeiten als Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten – Simulationen mit dem GTR

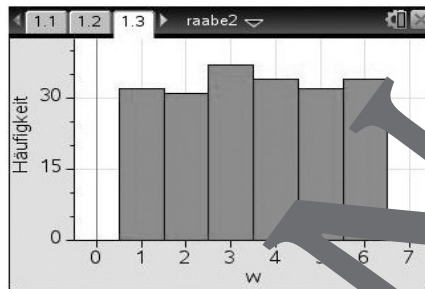
Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen



Multiple-Choice-Aufgabe



...ere, Stein, ...



Absolute Häufigkeiten



Würfel

I/E

**Klasse:** 8/9

**Dauer:** 4 Stunden

**Inhalt:** Realexperimente durchführen, protokollieren und präsentieren;  
Simulation von Zufallsexperimenten;  
Einsatz des GTR bei den Simulationen;  
unterschiedliche Möglichkeiten von Simulationen;  
Simulationspläne erstellen;  
mithilfe von relativen Häufigkeiten Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten  
ermitteln  
Vergleich der Ergebnisse aus den Realexperimenten mit den Ergebnissen  
aus den Simulationen

**Ihr Ziel:**

- ✓ Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten werden klar gegeneinander abgegrenzt
- ✓ Stärkung der Modellierungs- und Problemlösekompetenzen der Schüler
- ✓ Einsatz des **Ti-nspire CX** bei der Durchführung der Simulationen und Auswertung der Daten unter Verwendung von **Tippkarten**

Immer nur würfeln ist langweilig! Lassen Sie Ihre Schüler vielfältige Zufallsexperimente durchführen, diese im Modell nachspielen und dann gezielt Simulationspläne entwerfen. Für die Simulationen und die Präsentation der Ergebnisse wird der GTR eingesetzt.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Im Rahmen eines Spiralcurriculums bildet eine Unterrichtseinheit zur Simulation mit dem GTR eine Schnittstelle zwischen der handlungsorientierten Durchführung von Zufallsexperimenten in der Klassenstufe 5/6 und der Modellierung von Zufallsprozessen in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, indem sie die Realexperimente noch einmal aufgreift und anhand einfacher Beispiele den Abstraktionsprozess hin zur Simulation fördert. Zugleich bietet sich hier die Möglichkeit, den **GTR** sinnstiftend einzusetzen.

### Lehrplanbezug

Schauen wir zunächst einmal auf die Kompetenzen, die die Schüler durch diese Unterrichtseinheit erwerben bzw. stärken. Dieser Schritt ist notwendig, um die Unterrichtseinheit nicht nur unter inhaltlichen Aspekten, sondern auch methodisch zu planen und zudem die **Lernerfolgskontrolle** kompetenzorientiert zu gestalten. Wir wählen dazu exemplarisch den **Kernlehrplan Mathematik** aus **Nordrhein-Westfalen**.

### Inhalt

Ihre Schüler

- planen Datenerhebungen, führen sie durch und werten sie aus; zur Erfassung auch eine Tabellenkalkulation,
- benutzen relative Häufigkeiten von langen Versuchsreihen zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten,
- verwenden ein- oder mehrstufige Zufallsexperimente zur Darstellung zufälliger Erscheinungen in alltäglichen Situationen,
- wählen ein geeignetes Werkzeug (GTR) situationsangemessen aus und nutzen es,
- übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle,
- vergleichen und bewerten verschiedene mathematische Modelle für eine Realsituation.

### Methode

Wir zeigen in diesem Beitrag, welche methodischen Aspekte dazu beitragen, zudem prozessbezogene Kompetenzen wie das Argumentieren und Kommunizieren zu fördern.

Die gewählten Beispiele eignen sich vom Schwierigkeitsgrad her für die Jahrgangsstufen 8 und 9. Die Auswertung der Simulationen mit dem GTR ist durchweg auf grafischem Wege möglich, die rechnerische Auswertung können Sie als Mittel der **Binnendifferenzierung** nutzen. Es besteht die Möglichkeit, später in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe den Komplexitätsgrad der Beispiele zu steigern (z. B. das **Geburtsstagsproblem** oder das **Problem der vollständigen Serie**) und gleichzeitig die rechnerische Auswertung in den Fokus des Unterrichts zu rücken.

### Notwendige Vorkenntnisse

- Absolute und relative Häufigkeit
- Erfahrung mit dem TI-nspire CX
- Histogramm
- Stichlisten
- Begriffe wie: Ergebnis; Ereignis
- Zufallszahlen
- Berechnungen mit der Tabellenkalkulation
- Zufallsgeräte
- mehrstufige Zufallsexperimente

→ siehe **Glossar** auf **CD-ROM 56**

## Einsatz des GTR

Wir stellen **Tippkarten** für den **TI-nspire CX** zur Verfügung, auf denen beispielhaft verschiedene Techniken beschrieben und mit Screenshots illustriert werden. So können Ihre Schüler, dass Simulationen mit dem GTR in kurzer Zeit auch eine 1000-fache Wiederholung eines Experiments einschließlich der Auswertung ermöglichen. Ebenfalls wichtig ist es aber, dass Ihre Schüler zu Beginn die Experimente auch einmal real durchführen, um so den Zusammenhang zwischen dem **Modell** (der Simulation) und dem **Realexperiment** nicht aus den Augen zu verlieren.

## Ablauf

### M 1 Zufallsexperimente – real durchführen und dokumentieren

In einem ersten Schritt führen Ihre Schüler Zufallsexperimente selbstständig **Partnerarbeit** durch. Durch diesen handlungsorientierten Ansatz motivieren Sie Ihre Schüler. Im Sinne des Spiralprinzips aktivieren Sie einerseits Kenntnisse aus der Erprobungsstufe (z. B. Strichliste, absolute Häufigkeit), andererseits werden die Fragestellungen zu den an sich einfachen Zufallsexperimenten so komplex, dass Sie ein höheres Anforderungsniveau erreichen.

Die einzelnen Aufgaben des Materials **M 1** bieten Möglichkeiten der **Binnendifferenzierung**. Die Fragestellungen können interessenorientiert von den Schülern ausgewählt werden. Es ist auch denkbar, dass Sie verschiedenen Partnergruppen Aufgaben nach Schwierigkeitsgrad gestaffelt zuteilen.

Die Schüler sollen ihre Ergebnisse (Ergebnisse) mit dem **GTR** präsentieren. Unterstützen Sie Ihre Schüler, indem Sie entsprechende **Tippkarten** aus dem Material **M 5** bereithalten.

In einer abschließenden Reflexion machen Sie Ihren Schülern deutlich, dass Realexperimente sehr zeitaufwendig sein können. An dieser Stelle erklären Sie, dass auf der anderen Seite Zufallsexperimente notwendig sind, um über relative Häufigkeiten Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten, die sonst nur sehr schwierig zu berechnen sind, zu erhalten. Diese Schätzwerte sind nur dann relativ sicher, wenn das Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt wird.

### M 2 Zufallsexperimente mit dem GTR simulieren

Ihre Schüler gewinnen anhand der Materials **M 1** die Erkenntnis, dass die praktische Durchführung der Zufallsexperimente zusammen mit der Anfertigung der Strichlisten zeitaufwendig ist und die relativen Häufigkeiten nur grobe Schätzwerte für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten liefern und oft keine eindeutigen Antworten ermöglichen.

Im **Unterrichtsgespräch** erarbeiten Sie mit Ihren Schülern, dass man mit dem **GTR** Zufallsexperimente mithilfe von Zufallszahlen simulieren, eine große Anzahl von Zufallsexperimenten durchführen und die Ergebnisse tabellarisch und grafisch präsentieren kann.

Für die Bearbeitung werden aus dem Material **M 1** drei Zufallsexperimente ausgewählt, wobei die Anzahl der Wiederholungen wesentlich höher als im Realexperiment ist. So knüpfen Sie bewusst an die Ergebnisse der letzten Stunde an, schaffen aber gleichzeitig eine überschaubare und von allen Schülern nachvollziehbare Übersicht. Methodisch empfiehlt sich deswegen die **arbeitsteilige Gruppenarbeit** an. Ausgewählt werden die von der Stufe her sehr unterschiedlichen Zufallsexperimente (1), (3) und (6): ein Münzexperiment, ein Würfelexperiment und ein Urnenexperiment. Die jeweiligen Karten teilen Sie Ihren Gruppen zu.

Reihe 20 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Die Schüler sollen ihre Ergebnisse (Simulationen, Histogramme) mit dem **GTR** präsentieren. Unterstützen Sie die Schüler, indem Sie entsprechende **Tippkarten** aus dem Material **M 5** bereithalten. Abhängig von der Leistungsfähigkeit der Lerngruppe kann es auch möglich, zunächst ein Beispiel im **Unterrichtsgespräch** zu erarbeiten oder eine fertige Lösung durcharbeiten, um anschließend die Vorgehensweise auf die beiden anderen Beispiele zu übertragen.

### M 3 Simulationspläne erstellen

Dieses Material erfüllt im Wesentlichen die Funktion, auf der Grundlage der durchgeführten Realexperimente und Simulationen die Arbeitsweise zu reflektieren und einzelne Arbeitsschritte zu verallgemeinern, um die grundlegenden Ideen einer Simulation in einem Simulationsplan festzuhalten. Die grundlegenden Arbeitsschritte sind im linken Teil vorgegeben. Abhängig von der Lerngruppe ist es auch möglich, diese Punkte selbstständig erarbeiten zu lassen und sie dann zu kommentieren. Zur Förderung der Selbstständigkeit sollte aber der gemeinsame Austausch in **Kleingruppen** stattfinden. Anschließend werden die fertig ausgefüllten Simulationspläne in den Kleingruppen vorgestellt. Dabei wird deutlich, dass **vielfältige Lösungen** denkbar sind.

Der Begriff Simulation wird hier in zweifacher Bedeutung verwendet.

Ein **Multiple-Choice-Test** kann durch ein Experiment mit Münzen simuliert werden, wie andererseits ein Experiment mit Münzen, das dem **GTR** simuliert werden kann. Ermutern Sie Ihre Schüler, mit Blick auf das Ziel der Unterrichtseinheit schwerpunktmäßig den GTR einzusetzen.

Kopieren Sie den Simulationsplan in ausreichender Zahl, damit gegebenenfalls zur Vertiefung auch zu den Zufallsexperimenten aus Material **M 2** der Plan ausgefüllt werden kann.

### M 4 Lernerfolgskontrolle

Sie setzen die Aufgaben zur **Selbstkontrolle** als Test oder Teil einer Klassenarbeit ein. Bei der Selbstkontrolle müssen Sie die Lösungen Ihren Schülern zur Verfügung stellen. Die Aufgaben sind so konzipiert, dass Sie die anfangs genannten Kompetenzen überprüfen können.

### M 5 Tippkarten für den Taschenrechner CX

Der Beitrag enthält vier Karten, die es ermöglichen, dass Ihre Schüler weitgehend selbstständig mit dem **TI-nspire CX** die Aufgaben bearbeiten. Sie können einzelne Schüler gegebenenfalls vertiefend unterstützen und unterstützen.

Es sind folgende **Tippkarten** enthalten:

- Tippkarte 1 – Tabellen mit absoluten und relativen Häufigkeiten erstellen
- Tippkarte 2 – Histogramme zur Wertetabelle zeichnen
- Tippkarte 3 – Zufallszahlen erzeugen und Simulationen grafisch darstellen
- Tippkarte 4 – Simulationen auswerten

<b>Reihe 20</b> S 5	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

## Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

<b>Allg. mathematische Kompetenz</b>	<b>Leitidee</b>	<b>Inhaltsbezogene Kompetenzen</b> Ihre Schüler ...	<b>Anforderungsbere...</b>
K 4, K 5, K 6	L 2, L 5	... führen Zufallsexperimente durch, erstellen Tabellen mit absoluten Häufigkeiten und berechnen relative Häufigkeiten ( <b>M 1</b> ),	I
K 2, K 4, K 5	L 3, L 5	... stellen mit dem GTR absolute und relative Häufigkeiten als Histogramme dar und interpretieren sie als Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten ( <b>M 1</b> , <b>M 2</b> , <b>M 4</b> und <b>M 5</b> ),	I, II
K 1, K 2, K 3	L 1, L 5	... simulieren reale Zufallsexperimente in einem Modell mithilfe von Zufallszahlen ( <b>M 2</b> ),	II, III
K 2, K 4, K 5, K 6	L 4, L 5	... führen mit dem GTR Simulationen durch ( <b>M 2</b> , <b>M 4</b> und <b>M 5</b> ),	I, II
K 1, K 3, K 6	L 5	... reflektieren ihre eigene Arbeit, indem sie die einzelnen Schritte der Simulation in einem Lösungsbogen dokumentieren,	II, III
K 2, K 4, K 5	L 2, L 5	... überprüfen ihre erworbenen Kompetenzen, indem sie eine Lern-erfolgskontrolle durchführen ( <b>M 4</b> ).	II

I/E

## Abkürzungen

## Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

## Leitideen

L 1 (Zahl und Einheitlichkeit); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

## Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

<b>Reihe 20</b> S 6	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

## Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	<b>Zufallsexperimente real durchführen und dokumentieren</b> Zufallsexperimente durchführen, Strichlisten führen, Tabellen mit absoluten Häufigkeiten erstellen, relative Häufigkeiten berechnen, Tabellenkalkulation verwenden, Daten in Form von Histogrammen mit dem GTR präsentieren, Wahrscheinlichkeiten mithilfe relativer Häufigkeiten schätzen	1.
M 2	<b>Zufallsexperimente mit dem GTR simulieren</b> Realen Ergebnissen Zufallszahlen zuordnen, Umgang mit dem GTR, Ergebnisse mit der Tabellenkalkulation auswerten, Histogramme mit dem GTR erstellen, Simulationsergebnisse mit den Ergebnissen aus den Realexperimenten vergleichen	2.
M 3	<b>Simulationspläne erstellen</b> Zufallsgeräte adäquat auswählen, Merkmale von Lösungswegen, Eigenschaften von Simulationen verallgemeinern, modellieren, realen Ergebnissen Zufallszahlen zuordnen, die eigene Arbeit strukturieren	3.
M 4	<b>Lernerfolgskontrolle</b> Überprüfung der Kompetenzen, Simulationsplan aufstellen, die Brauchbarkeit von Zufallsgeräten beurteilen, zu Simulationen Realexperimente finden	4.
M 5	<b>Tippkarten für die Inspire CX</b> Begleitmaterial für den Einsatz des GTR bei den Materialien <b>M 1</b> , <b>M 2</b> und <b>M 4</b>	

### Minimalplan

Das Material **M 1** führt in die Unterrichtseinheit ein. Bei Zeitmangel können Sie die Anzahl der Experimente reduzieren. Das Material **M 2** ist unbedingt erforderlich, da anhand dieses Materials die Simulationen mit dem GTR entworfen werden. Bei Zeitmangel kann das Material **M 3** weggelassen werden, obwohl sich aus didaktischer Sicht gerade hier die Möglichkeit bietet, die eigene Arbeit zu reflektieren. Das Material **M 5** muss auf jeden Fall als Unterstützungsmaterial bereitgehalten werden. Die Lernerfolgskontrolle **M 4** kann auch später durchgeführt werden.

## M 1 Zufallsexperimente real durchführen und dokumentieren

### Aufgabe

Führt zu zweit zwei der sechs Zufallsexperimente, die auf den Aufgabenkarten beschrieben sind, jeweils wie angegeben durch, um mithilfe der relativen Häufigkeiten Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten der beschriebenen Ereignisse anzugeben.

- Erstellt mit dem GTR eine Tabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten.
- Stellt die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse mit dem GTR grafisch dar.
- Beantwortet die Fragen auf den Aufgabenkarten mithilfe der Ergebnisse aus a) und b).

(1) Drei 1-€-Münzen werden 50 Mal gleichzeitig geworfen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen keine Zahl, eine, zwei oder drei Zahlen oben?



© Thinkstock / iStock

(2) Vier 1-€-Münzen werden gleichzeitig 80 Mal geworfen.

Was ist wahrscheinlicher:

Es liegen höchstens drei Zahlen oben oder es liegen gleich viele Zahlen und Bilder oben?



© Thinkstock / iStock

(3) Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Würfelt 100 Mal.

Was ist wahrscheinlicher: Die Augensumme ist gerade oder die Augensumme ist ungerade?

© Thinkstock / iStock

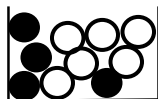
(5) Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ kommt man heraus, wenn man bei



Werfen eines Würfels spätestens im dritten Wurf eine Sechse gewürfelt hat.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür? Würfelt 25 Mal.

(6) Eine Urne enthält vier schwarze und sechs weiße Kugeln. Nacheinander werden drei Kugeln gezogen, ohne die gezogenen wieder zurückzulegen.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind keine, eine, zwei, drei weiße Kugeln dabei? Zieht 25 Mal.



Du kennst das berühmte Knobelspiel „Schere – Stein – Papier“. Zeigen die beiden Spieler das gleiche Zeichen, endet das Spiel unentschieden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Spiel unentschieden aus? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du bzw. dein Partner gewinnt?

Führt das Experiment 25 Mal durch.

**Tipp** Überlege, inwiefern man hier noch von einem Zufallsexperiment sprechen kann.

© Thinkstock / iStock

## M 4 Lernerfolgskontrolle

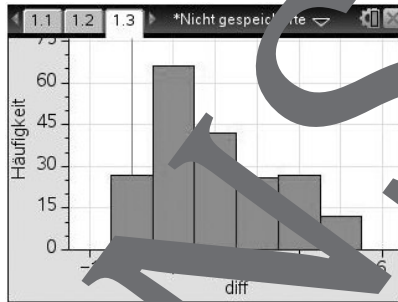
### Aufgaben

1. Erläutere, welches Zufallsexperiment durch die nachfolgende Simulation mit dem GTR modelliert wird, und interpretiere die Ergebnisse.

```

1.1 *Nicht gespeicherte
randInt(1,6,200)→w1
{6,6,1,4,3,5,1,3,6,2,5,6,2,3,1,6,1,1,4,6,6,2,2}
randInt(1,6,200)→w2
{2,1,1,1,4,2,1,3,2,6,4,2,5,2,6,5,1,6,3,2,5,1,1}
    
```

	A w1	B w2	C diff	Winkel
=			=abs(w1-w2)	
1	6	2	4	
2	6	1	5	
3	1		0	
4	4	1	3	
5		4		
C	diff:= w1-w2			



2. Der Hersteller von Müslipackungen startet eine Aktion, bei der in alle Packungen eine oder drei verschiedenen Aufklebern gelegt wird. Man kann an jeder Verlosung eines Einkaufsgutscheins für einen Naturkostladen teilnehmen, wenn man eine Karte mit allen drei Aufklebern einsendet.

**Fragestellung:** Wie viele Müslipackungen muss man im Mittel kaufen, bis man alle drei verschiedenen Aufkleber zusammen hat?

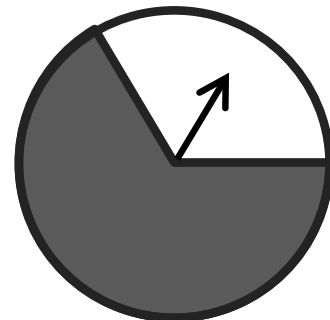
Beschreibe eine mögliche Vorgehensweise, um mit einer Simulation mit dem GTR einen Schätzwert zu ermitteln.



Müsli

© Thinkstock / iStock

3. Das Drehen eines Glücksrades (s. Abb.) soll durch folgende Zufallsgeräte simuliert werden. Beurteile die Brauchbarkeit.
- (1) Münzwurf (weiß → Bild; grau → Zahl)
  - (2) Würfel (weiß → 1, 2; grau → 3, 4, 5, 6)
  - (3) Alle Buben, Damen und Könige aus einem Kartenspiel (weiß → Bube; grau → Dame, König)
  - (4)



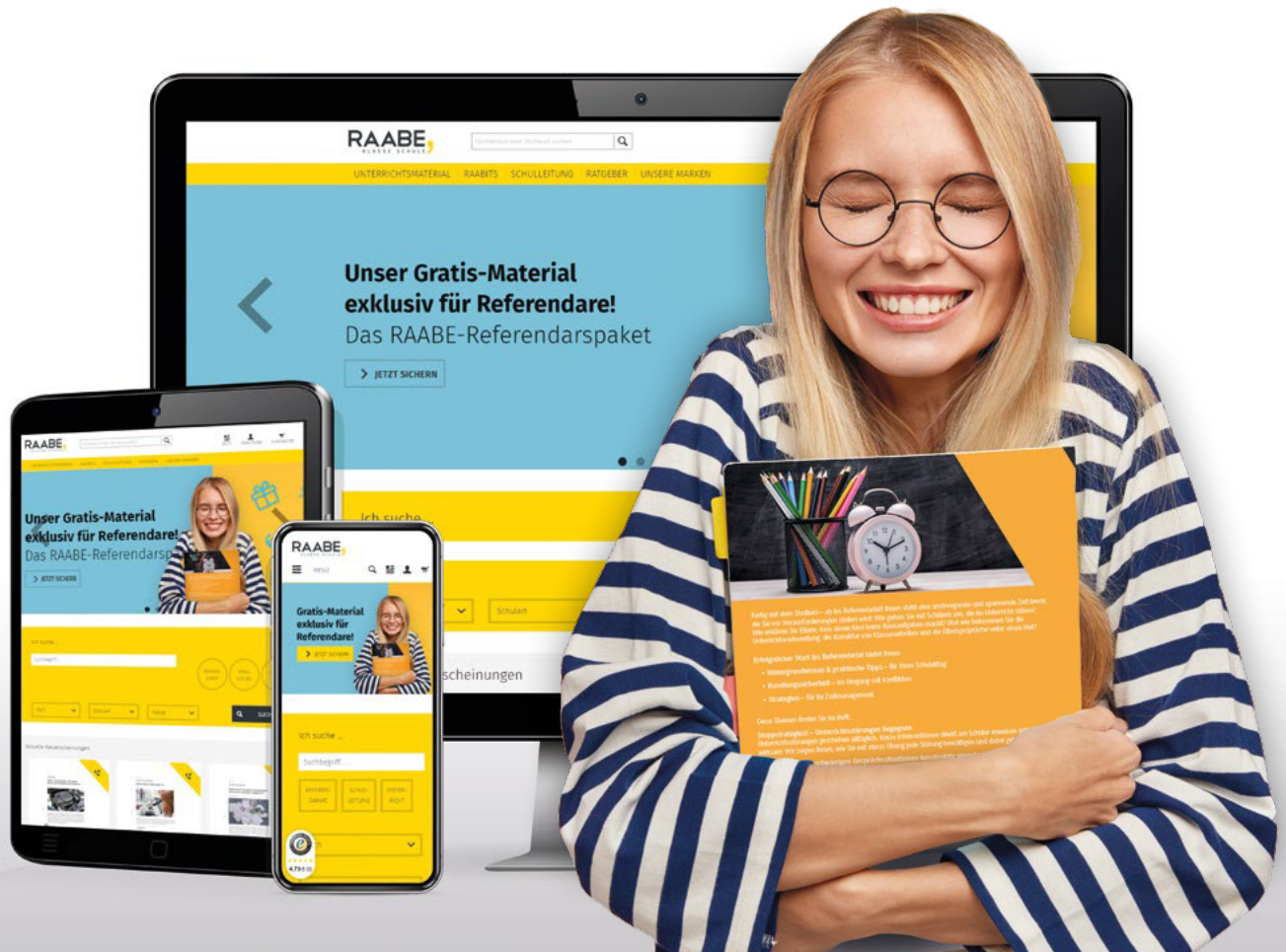
```

1.1 *Nicht gespeicherte
randInt(2,4,50)→g
{2,3,4,4,4,3,4,2,4,2,4,3,2,3,2,2,3,4,4,2,4,3,4}
    
```



# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 4.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Sichere Zahlung** per Rechnung,  
PayPal & Kreditkarte



**Exklusive Vorteile für Abonnent\*innen**

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



**Käuferschutz** mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**