Wir machen uns fit in Analysis! – Grundlagen (Teil I) und Anwendungen (Teil II)

Walter Czech, Krumbach

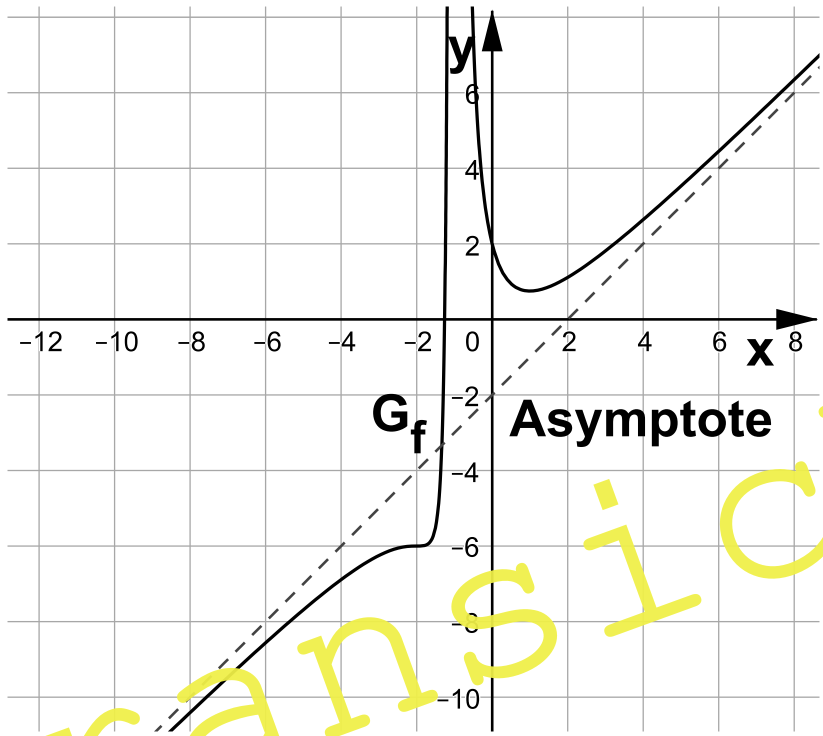


Abb. 1: Graph der Funktion $f(x) = (x^3 + 2) / (x + 1)^2$ mit Asymptote $r(x) = x - 2$

Klasse: 12 (G 8) und 13

Dauer: 6 Stunden für Teil II

Inhalt: Übungen zur Analysis:

Teil I auf CD-ROM 71:

Grundlagen der Algebra, Nullstellen von ganzrationalen, gebrochen-rationalen, Logarithmus- und natürlichen Exponentialfunktionen berechnen; maximalen Definitionsbereich bestimmen; Schnittpunkte zweier Graphen finden; Graphen auf Symmetrie untersuchen; zu einem gegebenen Graphen Funktionsgleichung aufstellen; Graphen strecken und verschieben; Zusammenhang der Graphen von Funktion, 1. Ableitung und Stammfunktion; zu gegebenen Werten von Funktion, 1. und 2. Ableitung mögliche Graphen finden; aus gegebenen Eigenschaften einer Funktion Funktionsgleichung ableiten; Ableitung und Integrieren

Teil II:

Funktionen analysieren, Anwendungen der Analysis, ungewöhnliche Aufgaben

Ihr Plus: Material zur Abiturvorbereitung

Sie bereiten Ihre Schüler auf die Abiturprüfung vor? Und Sie haben das Gefühl, dass es da noch immer die eine oder andere Lücke im Analysis-Wissen Ihrer Schüler gibt und dass Ihre Schüler bei algebraischen Grundfertigkeiten immer wieder an denselben Klippen scheitern? Dieser Beitrag schafft da Abhilfe!

Didaktisch-methodische Hinweise

Ziele der Unterrichtsreihe: Der Beitrag ist für die SEK. II vorgesehen. Insbesondere ist er gedacht für Schüler, die sich auf die **schriftliche Abiturprüfung** in Analysis vorbereiten.

Der Beitrag wurde geteilt: **Teil I** mit den **Grundlagen der Analysis** ist in EL 95 im Juni 2018 erschienen. Diesen Teil finden Sie auf **CD-ROM 71**. Schüler, die **Teil I** durchgearbeitet und die darin angewandten Methoden verinnerlicht haben, verfügen über Basiswissen zur Lösung von Standardaufgaben. In **Teil II** wird das Gelernte vertieft. Er beginnt in dieser Ausgabe mit dem Material **M 6**, den **Anwendungsaufgaben**. Die Prüfungsanforderungen haben sich in den letzten Jahren stark verändert. Mit sturem Auswendiglernen und dem Erlernen von „Kochrezepten" ist es nicht getan. Bei vielen Anwendungen ist es erforderlich, Funktionen zu finden, die vorgegebene Eigenschaften haben oder ein vorgegebenes Datenmaterial möglichst gut approximieren. Aufgaben, die ein solches Modellieren mit Funktionen verlangen, sind häufig Bestandteil von Abituraufgaben. Die Aufgabe **„Eisenbahnnetz"** (**M 7**) ist ein solches Beispiel. Die Schüler müssen hier sprachlich vorgegebene Bedingungen (z. B. vorgegebene Funktionswerte, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen) in Formelsprache übersetzen und lineare Gleichungssysteme lösen können. Sie müssen verstehen, worum es bei dem Problem geht, Zusammenhänge sehen, Schlüsse ziehen und Modelle aufstellen können.

Vorkenntnisse: Für die Bearbeitung von Teil II müssen die Schüler die Grundlagen der Analysis (Teil I) verstanden haben. Insbesondere: Grundlagen der Algebra, grundlegende Eigenschaften der möglicherweise in der Abiturprüfung vorkommenden Funktionstypen (ganzrationale Funktionen, gebrochen-rationale Funktionen, Exponential-und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Kosinus-Funktion), Grundlagen und Anwendungen der Differenzial-und Integralrechnung.

Aufbau: In Material **M 6** werden vier Typen von Funktionen analysiert: Kontext 1: Kurvendiskussion einer e-Funktion; Kontext 2: Gebrochen-rationale Funktion; Kontext 3: Gebrochen-rationale Funktion und ln-Funktion; Kontext 4: Kurvendiskussion: ln-Funktion. Das Modellieren bzw. Lösen von Praxisaufgaben wird in Material **M 7** geübt. Material **M 8** beinhaltet ungewöhnliche Aufgaben für leistungsstarke Schüler.

Vorbereitung: Teilen Sie Ihren Kurs in zwei Gruppen ein. Kopieren Sie die Materialien (**M 6–M 8**) in Klassenstärke, und laminieren Sie jeweils ein Exemplar jedes Materials zur besseren Haltbarkeit.

Ablauf: Beauftragen Sie die Gruppen jeweils mit der Bearbeitung einer oder zweier Aufgaben. Die Gruppen präsentieren ihre Lösungen in der nächsten Stunde im Plenum. Hierfür benötigen Sie **Folien** in ausreichender Zahl und **Folienstifte**. Zusammenfassend erhalten die Schüler **Musterlösungen** (vgl. Lösungsteil) zu den Aufgaben.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K 4, K 5	L 1, L 4	… analysieren Funktionen und führen eine Kurvendiskussion aus (**M 6**),	I, II
K 4, K 5	L 1, L 4	… wenden ihr Wissen in Anwendungssituationen an (**M 7**),	I–III
K 4, K 5	L 1, L 4	… lösen ungewöhnliche Aufgaben (**M 8**).	I, II

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf **CD-ROM 71**.

Auf einen Blick

Teil I: Einstieg – das Basiswissen wiederholen!

Material	Thema	Stunde
M 1 (CD 71)	**Frischen Sie Ihr Wissen auf! – Tandembogen** Nullstellen von ganzrationalen, gebrochen-rationalen, Logarithmus- und natürlichen Exponentialfunktionen berechnen, maximalen Definitionsbereich bestimmen, algebraische Grundübungen	1./2.
M 2 (CD 71)	**Frischen Sie Ihr Wissen auf! – Wiederholungsblatt** Schnittpunkte zweier Graphen bestimmen, Graphen auf Symmetrie untersuchen, algebraische Grundübungen	3./4. (HA)

Üben in Gruppenarbeit (2 verschiedene Gruppen)

Material	Thema	Stunde
M 3 (CD 71)	**Schaubilder fordern uns heraus** Funktionsgleichung zu einem gegebenen Graphen gesucht, Transformationen (Graphen strecken und verschieben) Zusammenhang der Graphen von Funktion, 1. Ableitung und Stammfunktion	5./6.
M 4 (CD 71)	**Bleiben Sie fit im Ableiten und Integrieren!** Übungen	7./8.

Leistungskontrolle

Material	Thema	Stunde
M 5 (CD 71)	**Haben Sie den Überblick? – Lernerfolgskontrolle** Test zur Selbstkontrolle oder auch Klausurvorschlag	9./10.

Teil II: Vertiefung des Gelernten

Material	Thema	Stunde
M 6	**Funktionen analysieren – Gruppenarbeit** Untersuchung einer e-Funktion, einer gebrochen-rationalen Funktion und einer ln-Funktion	11./12.
M 7	**Anwendungsaufgaben mit Funktionen lösen** Eisenbahnnetz, Kurvendiskussion einer e-Funktion	13./14.
M 8	**Ungewöhnliche Aufgaben – Gruppenarbeit** Umkehrfunktion, geometrische Deutung, Zuordnung Funktion – Graph, Anzahl der NS, Rotationskörper, Verschieben/Spiegeln	15./16.

Minimalplan HA = Hausaufgabe

Sie wählen einzelne Aufgaben aus und lassen nur diese bearbeiten.

II/A

M 6 Funktionen analysieren – Gruppe 1

Kontext 1: Kurvendiskussion einer e-Funktion

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = (8x + 16)\, e^{0,5\,x}$ (siehe Abb. 25).

1. Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen rechnerisch und untersuchen Sie das Verhalten von f(x) am Rande des Definitionsbereiches.

   Zeigen Sie, dass y = 0 waagrechte Asymptote ist.

2. a) Der Graph von f hat <u>genau</u> <u>einen</u> Extrempunkt. Ermitteln Sie Art und Lage dieses Extrempunktes rechnerisch.

b) An der Stelle x = –6 hat der Graph genau einen Wendepunkt. Tragen Sie die bisherigen Ergebnisse in Abb. 25 für den Bereich $-12 \le x \le 0$ ein.

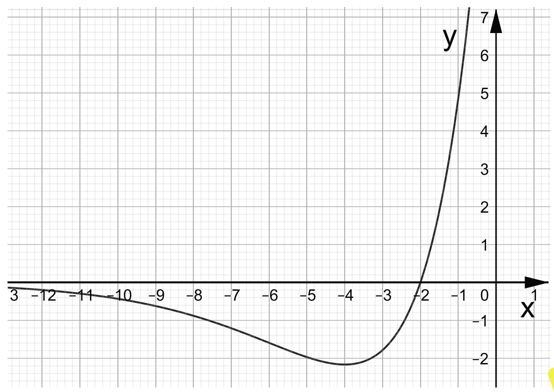


Abb. 25: Funktion $f(x) = (8x + 16)\, e^{0,5x}$

3. Gegeben ist weiter die Funktionenschar F_a mit $F_a(x) = 16ax \cdot e^{0,5\,x}$.

a) Ermitteln Sie den Zahlenwert für a, sodass die zugehörige Funktion Stammfunktion von f ist.

b) Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen vollständig ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.

Kontext 2: Gebrochen-rationale Funktion

Abbildung 26 zeigt die Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{4(x-3)}$$

und ihrer 1. Ableitung f´(x).

1. Ordnen Sie die Funktionen f und f´ jeweils ihrem Graphen zu und begründen Sie kurz.

2. Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung von f auch in der Form

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}$$

   dargestellt werden kann.

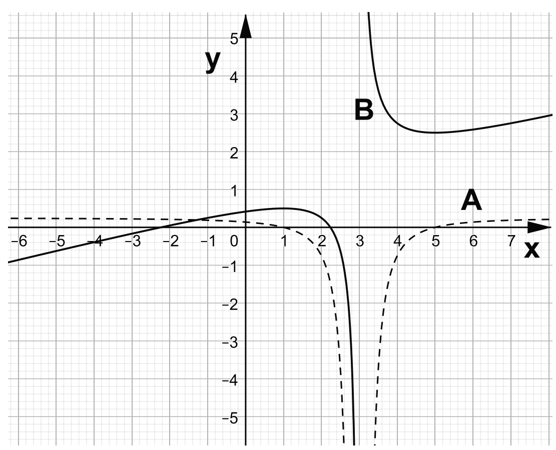


Abb. 26: Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{4(x-3)}$

3. Der Graph der Funktion f schließt mit seiner schrägen Asymptote und den Geraden x = 5 sowie x = u mit u > 6 ein Flächenstück vollständig ein.

a) Veranschaulichen Sie diese Situation in der Abbildung 26 für u = 7.

b) Geben Sie allgemein den Flächeninhalt dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u an.

c) Untersuchen Sie, was mit diesem Flächeninhalt für $u \to \infty$ geschieht.

M 7 Anwendungsaufgaben mit Funktionen lösen

Aufgabe 1: Eisenbahnnetz

Abbildung 29 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{D}_f$.

a) Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich von f an. Begründen Sie, dass x = 1 eine Polstelle ist.

b) Zeigen Sie , dass die Funktionsgleichung von f in der Form $f(x)=x-5+\frac{4}{x-1}$ geschrieben werden kann. Was bedeutet dies für den Graphen von f?

c) Der Graph von f, die Gerade mit der Gleichung y = x – 5 sowie die Senkrechte x = 3 schließen eine Fläche ein, die ins Unendliche reicht. Prüfen Sie, ob dieser Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

d) Die beiden Graphenteile von f sollen Teile eines Eisenbahnnetzes sein. Zwischen den Extrempunkten des Graphen von f soll dazu eine Gleisverbindung gebaut werden. Der Übergang an beiden Extrempunkten soll jeweils „ohne Knick“ erfolgen, d.h., in diesen beiden Punkten muss es jeweils einen gleichen Anstieg geben.

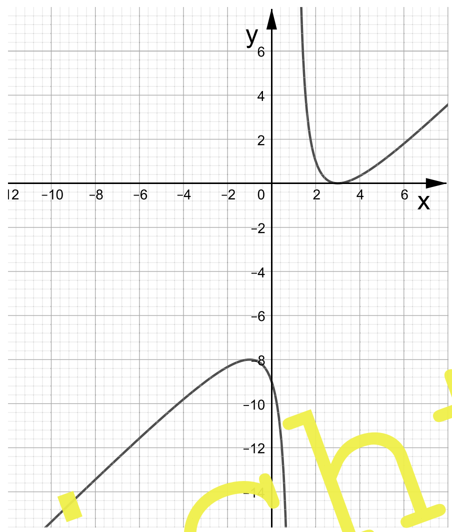


Abb. 29 Funktion $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x-1}$

Ihre Aufgabe ist es nun, die neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion von möglichst geringem Grad zu modellieren.

Tipp Geben Sie allgemein eine solche Gleichung (y = g(x)) an und listen Sie die weiteren Gleichungen auf, die von g(x) erfüllt werden müssen.

Aufgabe 2: Kurvendiskussion – e-Funktionen

Abbildung 30 zeigt die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit

$f(x)=8x\cdot e^{-x}$ und $g(x)=4x^2\cdot e^{-x}$.

a) Begründen Sie, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen.

b) Die Gerade x = 1 schneidet K in A und C in B. Die Punkte A und B sowie der Ursprung O(0|0) sind die Eckpunkte dieses Dreiecks. Ermitteln Sie die Flächenmaßzahl dieses Dreiecks OAB.

c) Für welche Werte von a hat die Gleichung $g(x)=a;\ a\in\mathbb{R}$ keine, genau eine bzw. mehrere Lösungen?

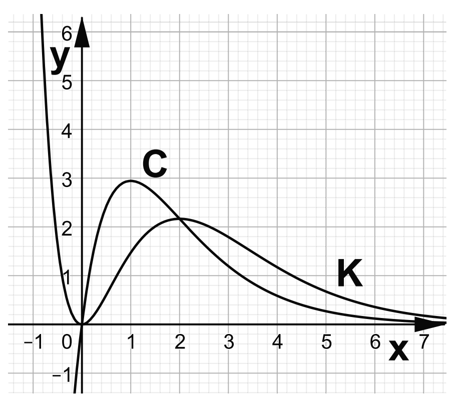


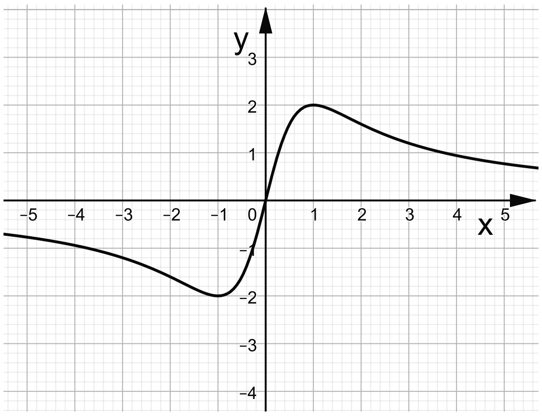
Abb. 30: Funktionen mit Graphen C und K

d) Es gibt Stammfunktionen F von f und G von g, sodass F(x) – G(x) = g(x) gilt. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das von den Graphen C und K vollständig eingeschlossen wird.

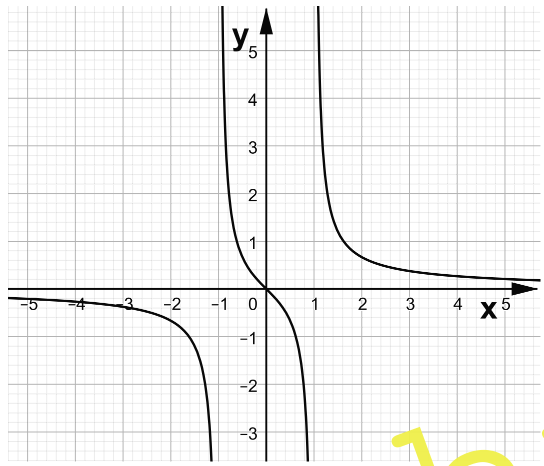
II/A

M 8 Funktionsschaubilder zu Aufgabe 3

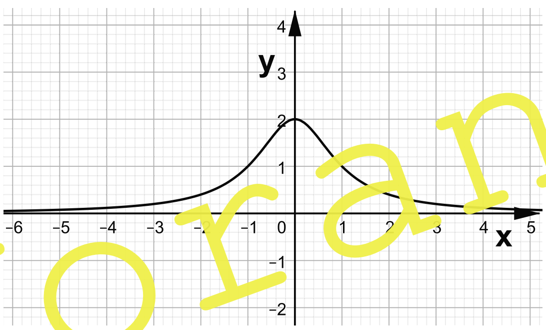
A (Abb. 32)



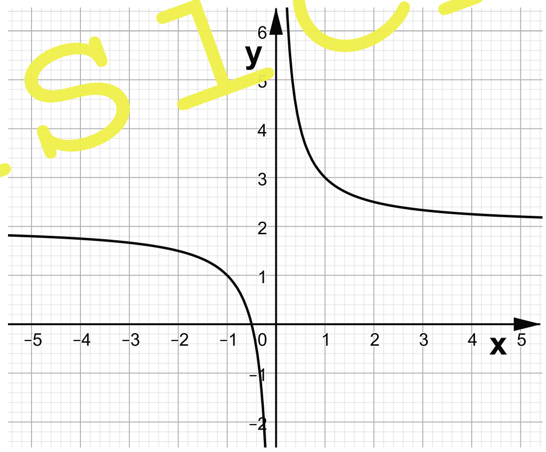
D (Abb. 35)



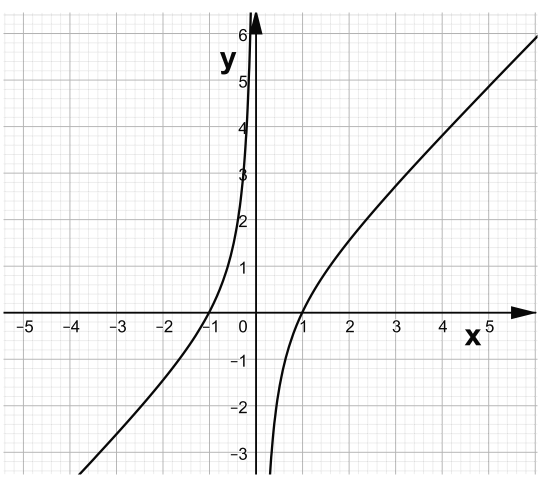
B (Abb. 33)



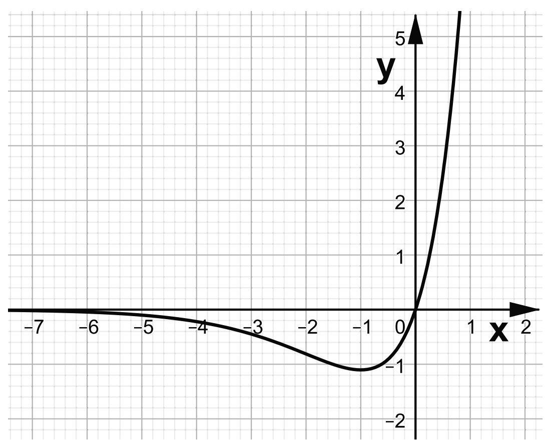
E (Abb. 36)



C (Abb. 34)



F (Abb. 37)



II/A

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 6 Funktionen analysieren

Kontext 1: Kurvendiskussion einer e-Funktion

1. Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 8(x+2)e^{0,5x}$; $f(x) = 0 \Rightarrow x = -2$, also: $S_x(-2|0)$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 16$, also: $S_y\ (0|16)$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

   $y = 0$ ist waagrechte Asymptote.

2. a)

   $f(x) = 8\,(x+2)\,e^{0,5x}$

   $f'(x) = 8\,[\,1\cdot e^{0,5x} + (x+2)e^{0,5x}\cdot 0,5\,]$

   $= 8e^{0,5x}(\,1 + 0,5x + 1\,) = 8e^{0,5x}(0,5x+2)$

Untersuchung auf lokale Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Hinreichende Bedingung:

$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < -4$ und
$f'(x) > 0$ für $-4 < x < \infty$

Mit dem Vorzeichenwechsel von – nach + folgt, dass an der Stelle x = –4 ein lokales Minimum vorliegt. Mit

$f(-4) = \dfrac{-16}{e^2} \approx -2,2$

erhält man den lokalen Tiefpunkt T(–4| –2,2).

b)

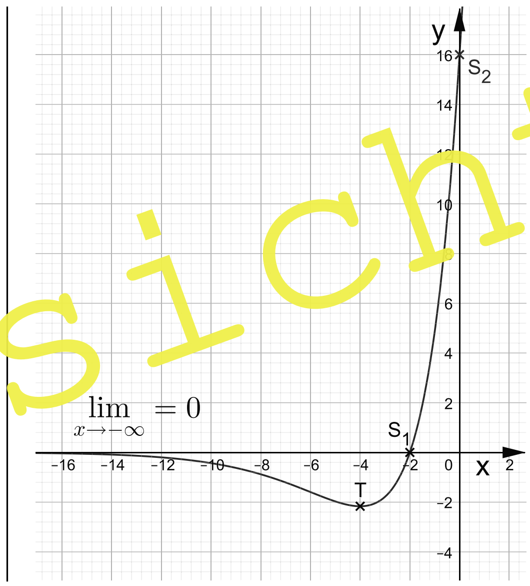


Abb. 39

3. a) F_a ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $F_a'(x) = f(x)$. Es gilt:

   $F_a'(x) = 16a(\,e^{0,5x} + x\cdot e^{0,5x}\cdot 0,5\,) = 16ae^{0,5x}(\,1 + 0,5x\,) = 8e^{0,5x}(\,2a + ax\,)$.

   Wir vergleichen mit $f(x) = 8e^{0,5x}(x+2)$ und erhalten die Bedingung: $2a + ax = x + 2 \Leftrightarrow a = 1$.

   Ergebnis: F_1 mit $F_1(x) = 16x\cdot e^{0,5x}$ ist eine Stammfunktion von f.

   b) $A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [\,16x\cdot e^{0,5x}\,]_{-2}^{0} = 0 - \dfrac{-32}{e} = \dfrac{32}{e} \approx 11,8$ [FE]

Kontext 2: Gebrochen-rationale Funktion

1. Der Graph A der Ableitung f' hat an den Stellen x = 1 und 5 eine Nullstelle. Für die Nullstelle $N_2(5|0)$ verläuft er links davon im negativen, rechts davon im positiven Bereich, hat also an der Stelle x = 5 einen VZW von – nach +. Der Graph B der Funktion f selbst hat also an der Stelle x = 5 einen Tiefpunkt.

   Der Graph A hat an der Stelle x = 1 eine Nullstelle und verläuft links davon im positiven, rechts davon im negativen Bereich, hat also an der Stelle x = 1 einen VZW von + nach –. Graph B hat an der Stelle x = 1 einen Hochpunkt.