Einführung in die Vektorrechnung – eine Lerntheke

Dr. Wolfgang Tews, Berlin

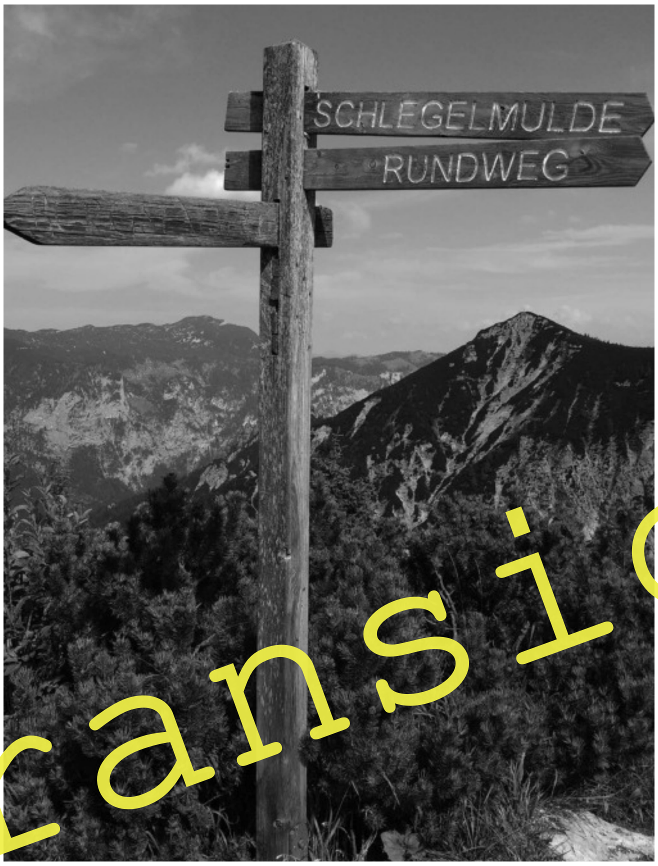

Foto: Anna-Greta Wittnebel

Abb. 1: An vielen Orten begegnen uns gerichtete Größen – Vektoren! (auf dem Predigtstuhl (Lattengebirge) bei Bad Reichenhall in den Berchtesgadener Alpen)

Klasse: 10/11

Dauer: 10–15 Stunden

Inhalt: Verschiebungen in der Ebene, Vektorbegriff, Kraft als Vektor, Beispiele für Vektoren, Rechenregeln der Vektorrechnung, Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie und Physik

Ihr Plus:

- ✓ Lernerfolgskontrolle mit Lösungen und Bewertungsvorschlag
- ✓ knappe Darstellung des Sachinhalts
- ✓ einfache Anwendung wegen didaktischer Reduktion

Vektoren an einer Wegkreuzung in den Bergen! Wer sich mit der Vektorrechnung beschäftigt, findet in seinem Alltag viele Beispiele für Vektoren. Mit dieser Unterrichtseinheit erlernen Ihre Schüler die wichtigsten Grundlagen der Vektorrechnung. Eine Lernerfolgskontrolle rundet den Beitrag ab.

Didaktisch-methodische Hinweise

Lehrplanbezug

Der vorliegende Entwurf ist als Einführung in die Vektorrechnung in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe (Klasse 10) oder als Wiederholung zu Beginn der Klasse 11 gedacht.

Vorkenntnisse

Der Vektorbegriff baut auf Vorkenntnissen der Lernenden über Verschiebungen und gerichtete Größen aus der Physik auf. In der Regel liegt der Schwerpunkt auf dem **Pfeilmodell** in der Ebene, kann aber – bei leistungsstarken Lerngruppen – problemlos auf den Raum übertragen werden. Bei der Behandlung der notwendigen Begriffe der Vektorrechnung wird auf *Pfeilklassen* und *Vektorräume* verzichtet. Neben der Einführung von Begriffen ist ein weiterer Schwerpunkt die Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen mit Vektoren und die Anwendung dieser auf die Lösung von Aufgaben aus der Geometrie und Physik.

Vorbereitung auf das Abitur – den Lehrstoff verinnerlichen

Nach der Erarbeitung der wichtigsten Begriffe sind Übungen zu deren Festigung angesagt. Beispiele für Vektoren, die sich in Richtungssinn, Lage, Vorzeichen und Betrag unterscheiden, sind von Ihren Schülern zu nennen bzw. zu entwerfen. Neben den Verschiebungen sollten Sie auch Kräfte hinsichtlich ihrer Ähnlichkeit als gerichtete Objekte behandeln.

Beim Rechnen mit Vektoren bilden Sie Analogiebetrachtungen zum Rechnen mit reellen Zahlen. Dabei werden Unterschiede von Vektorgleichungen und Gleichungen aus der Algebra betrachtet. Den Schluss der Reihe bilden schließlich Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie und Physik. Hier werden sachübergreifende Kenntnisse aus der Geometrie früherer Klassen reaktiviert.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K 1–K 6	… wiederholen Kenntnisse aus der Geometrie der Mittelstufe, … kennen den Zusammenhang von Verschiebungspfeilen und Vektoren, … systematisieren Lagebeziehungen von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, … können Operationen mithilfe der Regeln der Vektorrechnung ausführen, … können reale Gegebenheiten mithilfe der Vektorrechnung modellieren, … können Probleme mit den Mitteln der Vektorrechnung lösen, … können fachsprachliche Texte auswerten.	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden **CD-ROM 71**.

Auf einen Blick

Erlernen bzw. Wiederholen: Frischen Sie Ihr Wissen auf! (Jeweils Hausaufgaben)

Material	Thema
M 1	**Vektoren im Alltag**
M 2	**Darstellung von Vektoren**
M 3	**Addition und Subtraktion**
M 4	**Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren**
M 5	**Teilverhältnisse**
M 6	**Kräfteparallelogramm**
M 7	**Vektoren in der Physik**

Vertiefen: Verstehen Sie die Grundlagen!

Material	Thema	Stunde
M 8	**An vielen Orten begegnen Ihnen gerichtete Größen – Vektoren (Folie)** Einstieg: Man entdeckt Vektoren z. B. auf einer Wanderung.	1.
M 9	**Gerichtete Größen im Alltag – Wegweiser und GPS** Skalare und gerichtete Größen unterscheiden, Verschiebungspfeile	
M 10	**Verschiebungen in der Ebene und im Raum durch Vektoren darstellen** Lagebeziehungen von Vektoren	
M 11	**Übungen zum Thema „Verschiebungen“** Vektoren im Koordinatensystem, Spaltenvektor, Ortsvektor	2./3.
M 12	**Addition und Subtraktion von Vektoren** Betrag eines Vektors, Satz des Pythagoras, entgegengesetzte Vektoren, Nullverschiebung	4.
M 13	**Die skalare Multiplikation von Vektoren** Einführung der Skalarmultiplikation	5.

Üben: Verinnerlichen Sie die gedanklichen Schritte!

Material	Thema	Stunde
M 14	**Übungen zu Rechenoperationen mit Vektoren – leicht**	6./7.
M 15	**Übungen zu Rechenoperationen mit Vektoren – schwierig**	
M 16	**Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit – Beispiele**	8./9.
M 17	**Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit – Übungen**	
M 18	**Teilverhältnisse – Übungen**	10.
M 19	**Teilverhältnisse – Übungen (Fortsetzung)**	
M 20	**Vektoren in der Physik – Übungen**	11./12.
M 21	**Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen! (LEK)**	13.

M 1 Frischen Sie Ihr Wissen auf! – Vektoren im Alltag

Vektoren – geometrische und algebraische Darstellung

Eine Größe, deren Angabe alleine durch einen Zahlenwert (ggf. mit Einheit) charakterisiert ist, wird als **skalare Größe** oder kurz als **Skalar** bezeichnet. Beispiele sind Temperatur, Dichte oder Masse. Das Thermometer z. B. zeigt 36,6 °C an.

Abb. 2: Ein Thermometer zeigt die skalare Größe Temperatur an.
Abb. 3: Die Geschwindigkeit, mit der sich das Rennauto bewegt, ist dagegen eine vektorielle Größe.

Größen, die durch zwei Zahlenwerte, eine Länge und eine Richtung, gekennzeichnet sind, nennt man **Vektoren**.

Die Abb. 4 zeigt zwei Vektoren unterschiedlicher Länge, die vom Anfangspunkt A ausgehend in unterschiedliche Richtungen zeigen. Der Vektor, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt, kann entweder durch einen Kleinbuchstaben mit einem Pfeil, also $\vec{a}$, oder durch Anfangs- und Endpunkt mit einem Pfeil, also $\overrightarrow{AB}$, bezeichnet werden. Für den zweiten Vektor können die Bezeichnungen $\vec{c}$ oder $\overrightarrow{AC}$ gewählt werden.

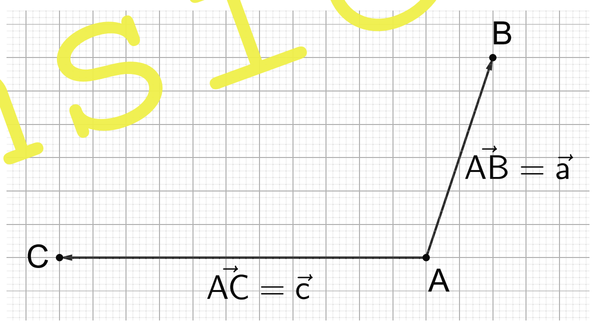

Abb. 4: 2 Vektoren mit unterschiedlichen Richtungen

Geometrische Bedeutung von Vektoren am Beispiel von Verschiebungen

Bei der Angabe z. B. einer Verschiebung eines Dreiecks in der Ebene oder im Raum ist nicht nur die Länge der Verschiebung, sondern auch die Richtung wichtig.

Abb. 5 zeigt zwei Verschiebungen eines Dreiecks ABC in der Ebene. Die Pfeile, die die Punkte A, B und C in die Punkte A‘, B‘ und C‘ abbilden, sind **Repräsentanten** ein und desselben Vektors gleicher Richtung und gleicher Länge. Gleiches gilt für die Pfeile, die das Dreieck ABC in das Dreieck A‘‘B‘‘C‘‘ überführen. Je nachdem, was für eine Verschiebung vorliegt, gibt es unendlich viele Repräsentanten eines bestimmten Vektors. Die Menge aller Pfeile, die ein und dieselbe Verschiebung veranschaulichen, wird auch Pfeilklasse oder einfach **Vektor** genannt.

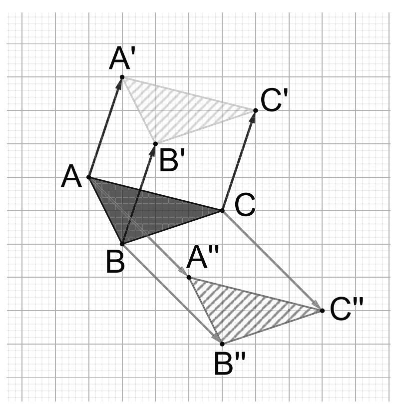

Abb. 5: Verschiebungen eines Dreiecks in der Ebene

M 4 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Information

<u>Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren</u>

Eine Summe der Form $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ mit r, s und t $\in \mathbb{R}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bezeichnet. Eine solche Summe kann auch aus mehr als drei Vektoren gebildet werden.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, deren Pfeile parallel verlaufen, heißen **kollinear**. Zwei kollineare Vektoren stellen das einfachste Beispiel einer Linearkombination dar; der eine ist das Vielfache des anderen: $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$. In diesem Fall bezeichnet man die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ als linear abhängig. Gilt $\vec{d} \neq r \cdot \vec{c}$ für alle $r \in \mathbb{R}$, so heißen die Vektoren $\vec{c}, \vec{d}$ **linear unabhängig.**

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ in der Ebene, deren Pfeile **senkrecht** zueinander verlaufen, sind linear unabhängig. Vektoren, die parallel zu einer Ebene liegen, heißen **komplanar**.

Drei komplanare Vektoren sind linear abhängig. Drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ im Raum, deren Pfeile senkrecht aufeinander stehen, sind linear unabhängig.

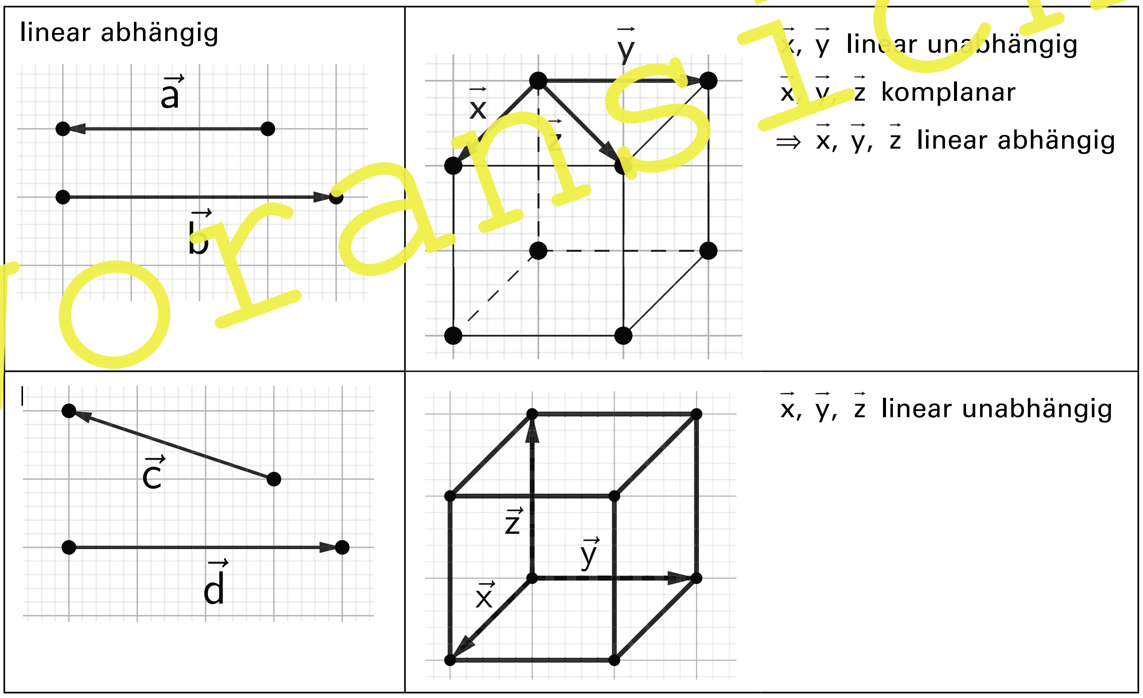

Abb.: 8: Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Definition

Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn für die Gleichung

$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 + \ldots + a_n\vec{x}_n = \vec{o}$

nur die sog. **triviale Lösung** $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ existiert, anderenfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**.

M 6 Frischen Sie Ihr Wissen auf! – Kräfteparallelogramm

Zerlegung von Kräften

Aus dem Physikunterricht ist bekannt, dass eine Größe wie die Kraft neben ihrer Maßzahl und Einheit noch durch ihre Richtung charakterisiert ist. Sie wird auch als ‚gerichtete' Größe bezeichnet und durch Vektoren dargestellt. Der jeweilige Betrag ist dann ein Maß für die ‚Stärke' der Kraft.

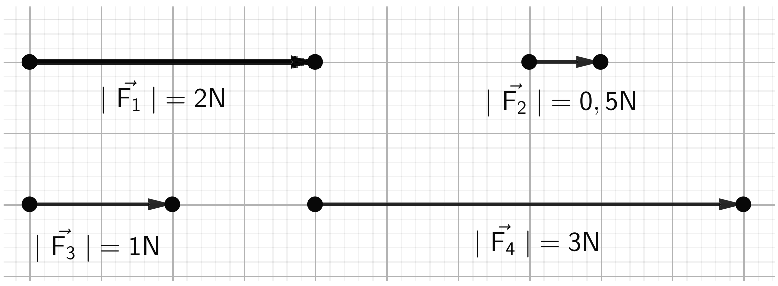

Abb. 11: Kräfte und Vektoren

Das Kräfteparallelogramm

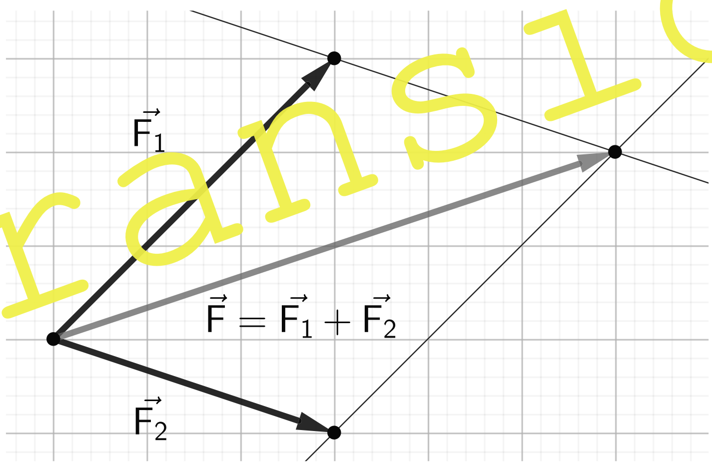

Abb. 12: Kräfte mit unterschiedlichen Richtungen

Abb. 12 zeigt zwei Kräfte unterschiedlicher Richtung, die an einem Massenpunkt M angreifen. Sie können ersetzt werden durch eine **Resultierende** $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, die sich als **Summe** der Einzelkräfte durch Vektoraddition ergibt. Die **Resultierende** ruft dann dieselbe Wirkung hervor wie die Einzelkräfte zusammen.

Ist andererseits die Kraft $\vec{F}$ gegeben, so kann diese in vorgegebene Richtungen in ihre **Komponenten** $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ eindeutig **zerlegt** werden. Beachtet man die eingezeichneten Hilfsgeraden, die jeweils parallel zu den Komponenten verlaufen, so liegt der Darstellung das bekannte **Kräfteparallelogramm** zugrunde.

M 8 An vielen Orten begegnen Ihnen gerichtete Größen – Vektoren!

Foto: Anna-Greta Wittnebel

Abb. 15: Auf dem Predigtstuhl (Lattengebirge) bei Bad Reichenhall in den Berchtesgadener Alpen

M 10 Verschiebungen in der Ebene und im Raum durch Vektoren darstellen

Wenn Vektoren durch ihre jeweiligen Repräsentanten charakterisiert werden können, so reicht es aus, nur diese hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu vergleichen.

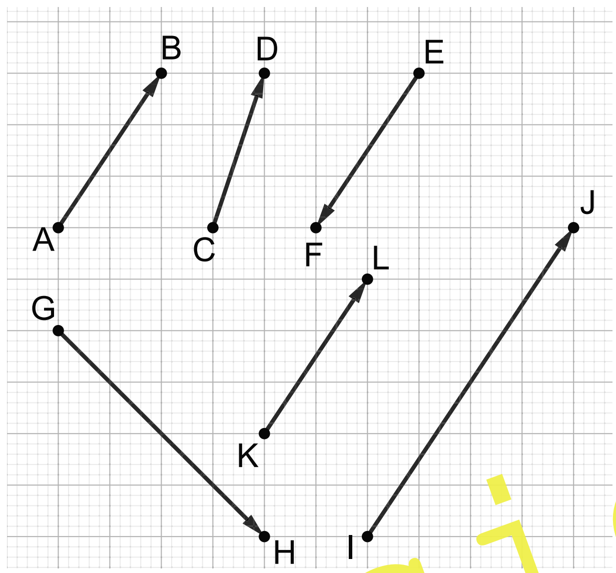

Abb. 18: Lagebeziehungen von Vektoren

Hinweis: Zur Charakterisierung der Lagebeziehungen von Vektoren werden folgende Zeichen verwendet: $=; \neq; \parallel; \uparrow\uparrow; \uparrow\downarrow; -; |\,|; \perp$ (gleich, ungleich, parallel, gleichgerichtet, entgegengesetzt gerichtet, das Negative von, Betrag, senkrecht aufeinander).

Aufgaben

1. Charakterisieren Sie möglichst viele Vektoren mithilfe der angegebenen Vereinbarungen hinsichtlich ihrer Lage zueinander (z. B. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{GH}$).
2. Charakterisieren Sie möglichst viele Vektoren mithilfe der angegebenen Vereinbarungen für den in Abb. 19 dargestellten Würfel (beachten Sie, dass der Punkt H nicht sichtbar ist).

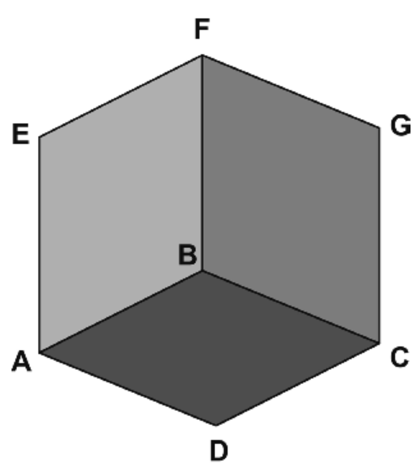

Abb. 19: Würfel im Raum

M 15 Übungen zu Rechenoperationen mit Vektoren – schwierig

Aufgaben

1. Ergänzen Sie die Punkte A(2|–1), B(5|3) und C(–1|8) durch den Punkt D, sodass die Punkte A, B, C und D ein Parallelogramm bilden.
2. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit A(–1|2|–5), B(1|12|6) und C(3|6|–3).

Information

Werden Vektoren so aneinandergelegt, dass die jeweiligen Endpunkte mit den Anfangspunkten des folgenden Vektors übereinstimmen, spricht man von einem **geschlossenen Vektorzug**. Für die Lösung vieler Aufgaben ergeben sich so Vorteile.

Dabei ist es wichtig, zunächst einen **Umlaufsinn** festzulegen. In der Regel wird der mathematisch positive Umlaufsinn – also entgegen dem Uhrzeigersinn – gewählt. Dann werden alle Vektoren in **Umlaufrichtung addiert**. Die Summe aller Vektoren ergibt den Nullvektor (linke Abb.). Von den Vektoren, deren Richtung entgegen dem Umlaufsinn verlaufen, werden die Gegenvektoren gebildet (rechte Abb.).

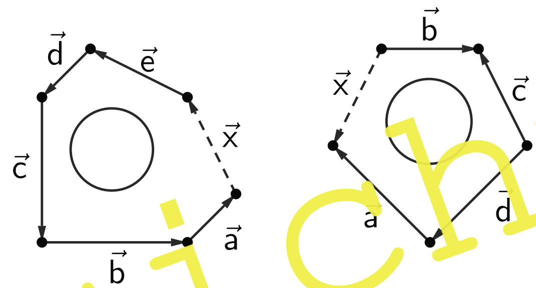

Abb. 27: Umlaufsinn

Linke Abb. $\vec{a}+\vec{x}+\vec{e}+\vec{d}+\vec{c}+\vec{b}=\vec{o}$ und rechte Abb. $\vec{x}-\vec{a}-\vec{d}+\vec{c}-\vec{b}=\vec{o}$

3. Gegeben ist das Dreieck ABC.

   M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$.

   Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AM}$ als Summe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{c}$.

   Benutzen Sie dabei auch geschlossene Vektorzüge.

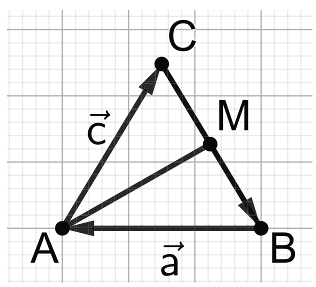

Abb. 28: Mittelpunkt einer Strecke im Dreieck

Für Experten

4*. Gegeben ist das Viereck ABCD.

   M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$.

   Es gelte: $\overline{DP} : \overline{PM} = 2 : 1$.

   Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{AP}$ als Summe der Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

   Benutzen Sie dabei auch geschlossene Vektorzüge.

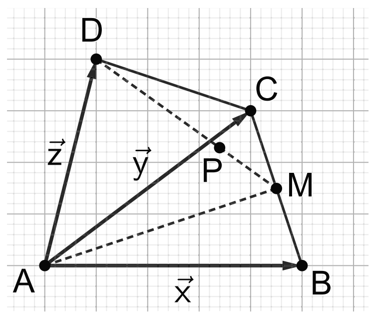

Abb. 29: Mittelpunkt einer Strecke im Viereck

M 21 Vektoren in der Physik – Übungen

Aufgaben

1. Ein Körper der Gewichtskraft 100 N hängt an zwei Drahtseilen, die mit der Waagerechten einen Winkel von 30° einschließen.

   Berechnen Sie die Zugkraft in den Seilen.

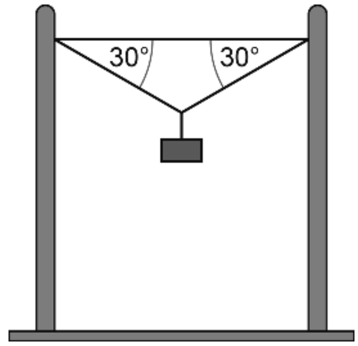

Abb. 35

2. Ein Körper der Gewichtskraft 200 N hängt an einem Seil, das an der Wand befestigt ist.

   Das Seil läuft (entsprechend der Skizze) über einen Arm, der unter einem Winkel von $\alpha = 50°$ angebracht ist.

   Berechnen Sie die waagerechte Kraft $\vec{F}_1$ in Seil-Richtung und die Kraft $\vec{F}_2$ in Arm-Richtung.

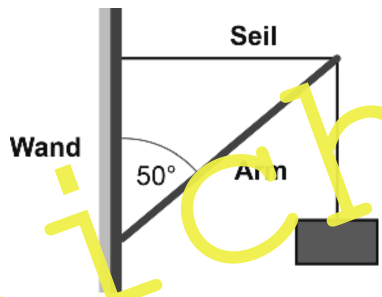

Abb. 36

3. In den Punkten A und B zieht je eine Person an einem Tau mit den Kräften $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$. Die entsprechenden Winkel sind der Abbildung zu entnehmen.

   Im Punkt C hält eine Person mit der Kraft $\vec{F}$ vom Betrag 700 N dagegen.

   Mit welcher Kraft müssen die Personen in A und B ziehen, damit Gleichgewicht herrscht?

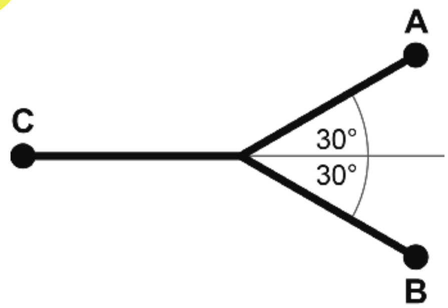

Abb. 37

4. Ein Mast wird durch zwei Spannseile gehalten. Das waagerechte Seil übt die Kraft $F_1 = 2{,}5$ kN aus.

   Mit welcher Kraft F_2 muss das schräge Seil gespannt sein und wie groß ist die Kraft F, die auf den Boden wirkt, damit das System sich im Gleichgewicht befindet?

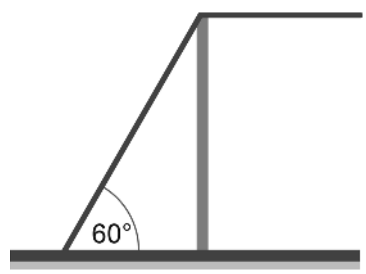

Abb. 38

Erläuterungen und Lösungen

M 9 Gerichtete Größen im Alltag – Wegweiser und GPS

1. Ein Verschiebungspfeil reicht aus, da dieser an jedem beliebigen Punkt des Dreiecks angebracht werden kann. In jedem Fall wird der betrachtete Originalpunkt P eindeutig auf den zur Verschiebung gehörenden Bildpunkt P‘ abgebildet.
2. Gerichtete Größen: Kraft $\vec{F}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{a}$

   Nicht gerichtete Größen: Temperatur T, Dichte ρ, Masse m, Arbeit W, Volumen V, Flächeninhalt A

M 10 Verschiebungen in der Ebene und im Raum durch Vektoren darstellen

1. z. B. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{IJ}$, $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{KL}|$, $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{GH} \neq \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KL} \parallel \overrightarrow{IJ}$
2. z. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{FB}|$, $\overrightarrow{HG} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AG} \neq \overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{AH}$

M 11 Übungen zum Thema „Verschiebungen“

1. Die gesuchten Koordinaten lauten:

   A‘(6|5), B‘(8|6) und C‘(7|7).

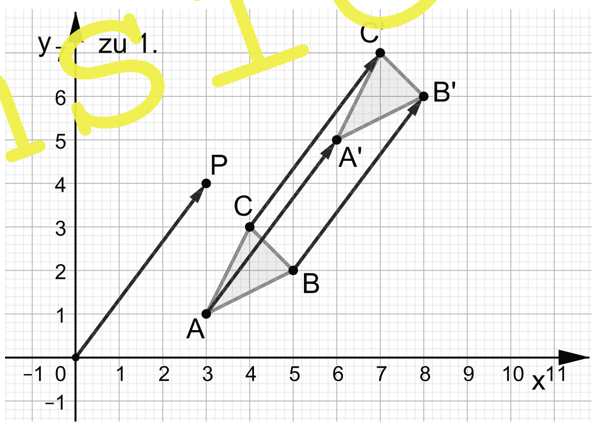

Abb. 39

2. Der Spaltenvektor von $\vec{p}$ lautet:

   $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

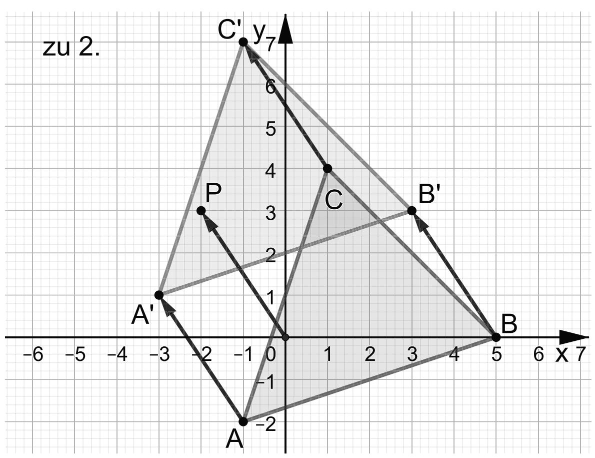

Abb. 40