Der Testturm in Rottweil – eine Anwendungsaufgabe zur Trigonometrie

Peter Bunzel, Rottweil

© Peter Bunzel

Abb. 1: Der Aufzugstestturm in Rottweil

Klasse:	10/11
Dauer:	ca. 2 Stunden
Inhalt:	Eine Anwendungsaufgabe zu trigonometrischen Zusammenhängen
	Kreisbogen, Koordinaten, Sinus, Kosinus, Kosinussatz
Ihr Plus:	Alltagsbezug; Abiturvorbereitung; geeignet für fachübergreifenden Unterricht

Für die Trigonometrie gibt es einige schöne Anwendungsaufgaben, aber selten welche, die durch die Kürze und Prägnanz der Lösungen bestechen und dennoch gut vorstellbar sind. Arbeiten Sie mit Ihrem Kollegen zusammen. Es gibt klare Bezüge zur Geografie.

Didaktisch-methodische Hinweise

Am 7./8.10.2017 wurde in Rottweil mit einem Turmfest am „ThyssenKrupp-Testturm“ die Fertigstellung dieses Turms gefeiert. Er bietet ein alltagsnahes Beispiel für die Anwendung von Mathematik. Hintergrundinformationen finden Sie hier:

– http://testturm.thyssenkrupp-elevator.com/
– https://de.wikipedia.org/wiki/Aufzugstestturm_(Rottweil)

Lehrplanbezug

Ihre Schüler ...

... kennen die trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und können diese auch bei praxisbezogenen Fragestellungen anwenden (Klasse 9).

... können sicher mit Sinus und Kosinus für beliebige Winkel umgehen (Klasse 10).

... treffen beispielsweise bei der Untersuchung naturwissenschaftlicher Fragestellungen erneut auf die Sinus- und Kosinusfunktion, deren Ableitungsfunktionen sie sich auf grafischem Weg plausibel machen (Klasse 11)[1].

Ablauf

Aufgabe 1 bietet einen Einstieg in die Trigonometrie. Sie ist für die Behandlung des Themas *Testturm* nicht unbedingt erforderlich. Das Niveau dieser Aufgabe ist geringer als das der folgenden beiden Aufgaben. Die Aufgabenstellung dürfte einigen Schülern aus dem Mathematikunterricht vergangener Schuljahre bekannt sein. Gerade deshalb eignet sie sich als Einstieg bzw. Wiederholung.

Aufgabe 2 ist für eine Zusammenarbeit mit dem Geografie-Lehrer gedacht. Ihre Schüler berechnen verschiedene Kantenlängen einer Einteilung der Erdoberfläche in Vierecke. Hierzu müssen sie verschiedene Längen mithilfe trigonometrischer Zusammenhänge berechnen. Dies ist eine anspruchsvolle, **offene Aufgabe**. Falls Ihre Schüler die benötigten Vorkenntnisse über die Form der Längen- und Breitenkreise (Kreisbögen) nicht haben, erläutern Sie zunächst die geografischen Zusammenhänge anhand der **Farbfolie (M 1)**.

Die **Aufgabe 3** behandelt Abstandsberechnungen mithilfe von Koordinaten, die mit einem Smartphone ermittelt wurden (GPS). Auch diese Aufgabe hat durch die Verwendung von Koordinaten einen deutlichen Bezug zur Geografie. In den Lösungen finden Sie zwei verschiedene Lösungsansätze.

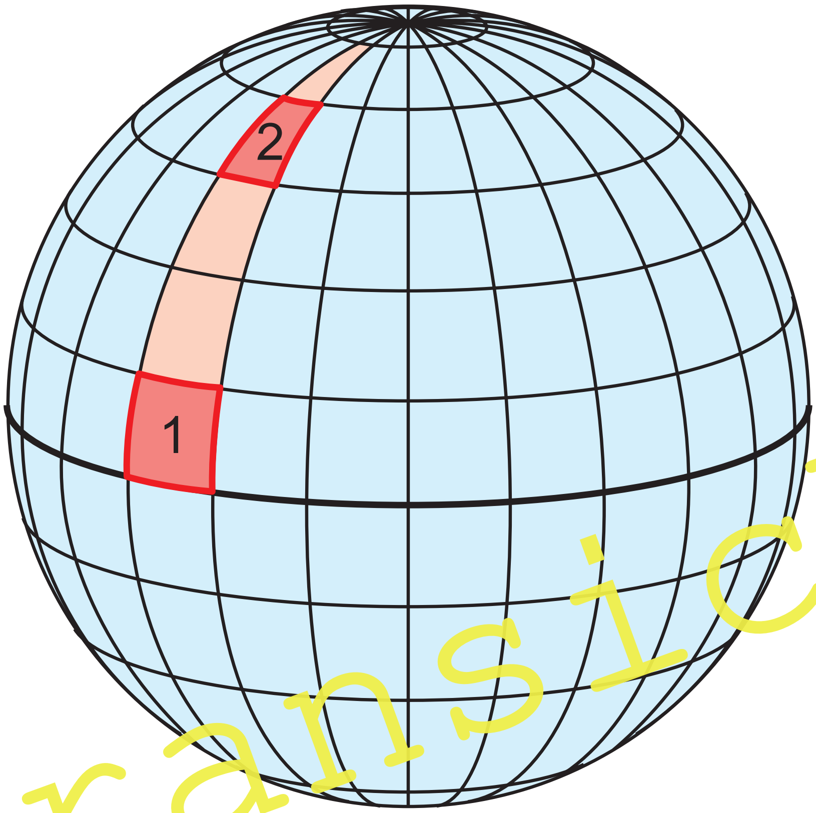
Zunächst geben Sie bei Google-Maps in die Suchzeile „**Thyssen Turm Rottweil**“ ein. Mithilfe des **Routenplaners** können Sie die Entfernung zu einer zweiten Position bestimmen, z. B. zu der Wiese der **Modellflieger Rottweil**. Sie klicken mit der linken Maus-Taste die Position des Testturms an und rufen mit der rechten Maus-Taste das Kontextmenü auf. Klicken Sie auf „**Entfernung messen**“ und mit der linken Maus-Taste die Position der Modellflieger an. Die Ergebnisse werden nur ungefähr übereinstimmen, da die von Google-Maps verwendete Position der „Modellflieger“ mitten auf einer Wiese liegt (s = 2,12 km). Verschieben Sie daher die zweite Position an die benachbarte Wegekreuzung, damit die Übereinstimmung erhöht wird (vgl. Ergebnis **M 2**, Aufgabe 3 a).

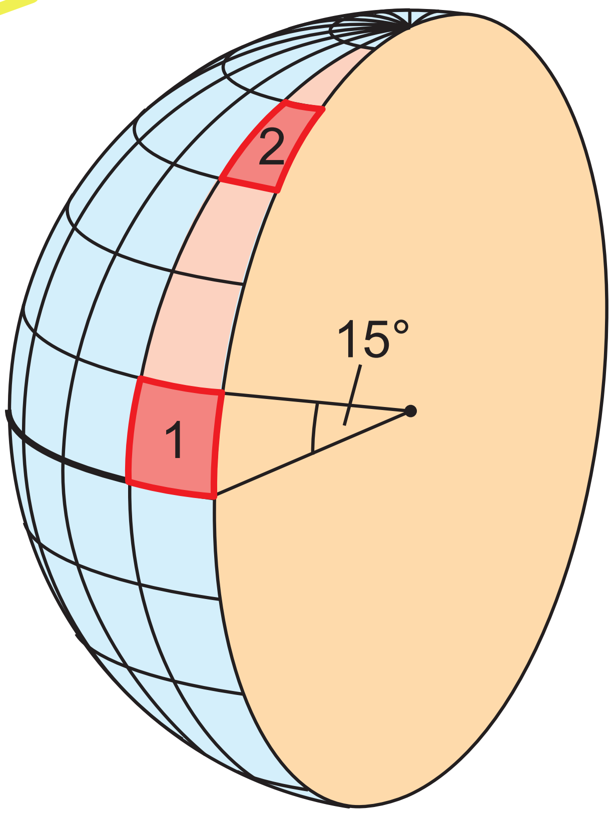

Foto: P. Bunzel

Abb. 2 (Das Foto entstand während der Bauphase.)

[1] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26221

M 1 Die Einteilung der Erde in Längen- und Breitengrade





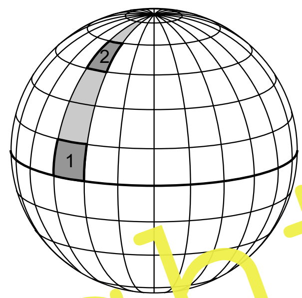
M 2 Übungsaufgaben zu trigonometrischen Zusammenhängen

Aufgabe 1

Ein Spaziergänger (Augenhöhe 1,70 m) sieht die Oberkante des Turmes unter einem Sehwinkel von 6,96°. Die (waagerechte) Entfernung zum Turm beträgt 2 km. Berechnen Sie die Höhe des Turmes.

Aufgabe 2

Von Darstellungen der Erdoberfläche kennt man die Einteilung in Längen- und Breitenkreise bzw. Vierecke von 15° x 15° (siehe Abb. 1).



© Zoonar / Thinkstock

Abb. 1

a) Wie groß sind die Kantenlängen eines 15°-Vierecks, dessen untere Kante auf dem Äquator liegt (Viereck 1)?

Tipp

Betrachten Sie die Erde als perfekte Kugel mit dem Äquatorumfang U = 40 000 km[2].

b) Wie groß sind die Kantenlängen, wenn die untere Kante auf 45° N liegt (Viereck 2)?

c) Versuchen Sie, die beiden Vierecke grafisch darzustellen.

Welche Probleme ergeben sich dabei?

Aufgabe 3: Wie weit ist der Turm von den Modellfliegern entfernt?

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Testturm und dem Gelände der Modellflieger?

Standort der Modellflieger Rottweil e. V.:

48° 10' 21" N / 8° 39' 10" O

Position des Testturms:

48° 10' 46" N / 8° 37' 31" O

Tipps

1. Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 2.
2. Zum Rechnen mit Koordinaten: Eine Einheit dividiert durch 60 ergibt die nächstkleinere Einheit: z. B.

$$20'' = 20 \cdot \frac{1'}{60} = \frac{20'}{60} \approx 0{,}33'.$$

b) In welcher Richtung liegt der Testturm vom Gelände der Modellflieger aus gesehen?

c) Welche Entfernung hätten der Testturm und der Platz der Modellflieger, wenn beide exakt 30° weiter nördlich liegen würden?

Foto: P. Bunzel

Abb. 2 (Das Foto entstand während der Bauphase.)

[2] Genau beträgt der Äquatorumfang 40 076 km.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

Aufgabe 1

$$\tan(6{,}96°) = \frac{h}{2000\text{ m}}$$

$$\Rightarrow h = 2000\text{ m} \cdot \tan(6{,}96°) \approx 244{,}15\text{ m}$$

Die Augenhöhe muss zum Ergebnis noch addiert werden:

244,15 m + 1,70 m = 245,85 m

Der Turm ist 246 m hoch.

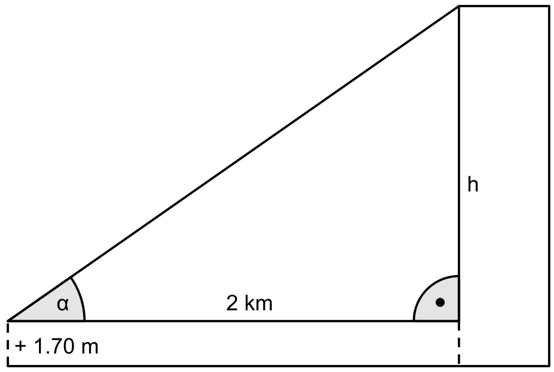


Abb. 6

Aufgabe 2

a) Drei der vier Seiten können leicht berechnet werden (untere, linke und rechte Seite):

$$a = \frac{15°}{360°} \cdot 40\,000\text{ km} = \frac{40\,000\text{ km}}{24} \approx 1\,666{,}667\text{ km}$$

Für die vierte, <u>obere</u> Seite muss zunächst der Umfang eines Breitenkreises bestimmt werden:

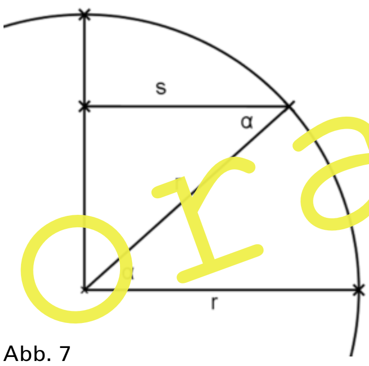


Abb. 7

Es gilt:

$\frac{r}{R} = \cos(\alpha)$, also $r = R \cdot \cos(\alpha)$.

Der Umfang eines Breitenkreises ist damit:

$u(\alpha) = 2\pi R \cdot \cos\alpha = U_A \cdot \cos\alpha$,

wobei U_A der Umfang des Äquators ist und hier mit
$U_A = 40\,000\text{ km}$ angenommen wird.

Für $\alpha = 15°$ gilt: $u(15°) \approx 38\,637\text{ km}$.

Der 15°-Bogen hat dann die Länge $b = \frac{u(15°)}{24} \approx 1610\text{ km}$.

b) Die Seitenlängen bleiben gleich lang wie in Teilaufgabe a).

Die untere Kante hat die Länge: $k_u = \frac{u(45°)}{24} = \frac{40\,000\text{ km} \cdot \cos(45°)}{24} \approx 1179\text{ km}$.

Die obere Kante hat die Länge: $k_o = \frac{u(60°)}{24} \approx 833\text{ km}$.

c) Die Erdoberfläche ist gekrümmt, ein Blatt Papier ist flach. Bei dem Versuch, die Erdoberfläche auf Karten abzubilden, kommt es unvermeidlich zu Verzerrungen.

Aus Abb. 5 kann man entnehmen, dass ein 15°-Sektor (der auf die Seite gelegt ist) etwa folgende Form haben muss:

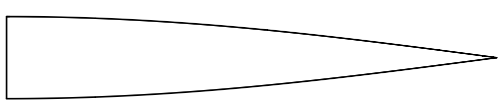


Abb. 8