Ich kann's begründen! – Mathematisch argumentieren am Beispiel der binomischen Formeln

Tobias Jaschke, Uhingen

Bilder: 1. Thinkstock; 2+3: Julia Lenzmann

Nicht nur Detektive brauchen stichhaltige Beweise. Auch in der Mathematik spielt das Begründen mit Bespielen und das Beweisen mathematischer Sätze eine wichtige Rolle.

Klasse:	8
Dauer:	4–10 Stunden, je nach Materialauswahl
Inhalt:	bildliches, algebraisches und kontextorientiertes Begründen, über Beispiele argumentieren, Termumformungen, binomische Formeln
Ihr Plus:	alternative Arbeitsblätter zur Differenzierung (**CD-ROM 68**), Raster zum Erstellen eigener Memoblätter (**M 11** und **M 12**), Checkliste zur Selbsteinschätzung (**CD-ROM 68**)

Warum ist das so? Dies fragen vor allem kleine Kinder.

In diesem Beitrag setzen sich Ihre Schüler mit verschiedenen Möglichkeiten auseinander, Aussagen zu begründen – mit Beispielen, mit grafischen Überlegungen und auch mit Termumformungen. Sie entdecken Fehler in Rechnungen und werden schließlich an einfache mathematische Beweise herangeführt. Eine Lernerfolgskontrolle rundet die Unterrichtseinheit ab.

Didaktisch-methodische Hinweise

Argumentieren – was ist das eigentlich?

Argumentieren ist der Versuch, eine andere Person oder sich selbst von einer Annahme, einem Lösungsweg, einer Erläuterung oder einer Vermutung zu überzeugen. Je mehr dabei die vorgebrachten Argumente stimmig und nachvollziehbar und je mehr sie an den Kriterien der Rationalität festzumachen sind, desto überzeugender sind sie. Im schulisch-mathematischen Rahmen bedeutet dies, dass eine Argumentation dann als schlüssig und überzeugend anerkannt wird, wenn sie in ihrer allgemeinen Gültigkeit klar wird und sich bei den Lernenden die Erkenntnis einstellt, dass weitere Beispiele und Diskussionen keine neuen Erkenntnisse bringen werden.

Argumentieren im Mathematikunterricht – Vorbehalte und Chancen

Nach den Vorstellungen der Kultusministerkonferenz (KMK) sollen Argumentationsprozesse immanenter Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. Und natürlich ist Argumentieren im Mathematikunterricht nichts gänzlich Neues. Schon immer wurden die Lernenden im Zuge von Lernprozessen aufgefordert, ihre Meinung zu vertreten und schlüssige Gründe für ihre Aussagen anzugeben. Neu ist, dass diese Argumentationsprozesse explizit als inhaltsübergreifende Kompetenzen formuliert sind und daher bei der Unterrichtsplanung bewusst mit bedacht werden müssen. Sie werden dadurch wesentlich verbindlicher und verlangen von uns Mathematiklehrern eine tiefer gehende Durchdringung mathematischer Inhalte.

„Beweisen, das können meine Schüler nicht!“. Vielleicht liegt diese weitverbreitete Ansicht unter Lehrkräften in den Vorstellungen begründet, die viele vom Begründen und Beweisen aus der eigenen Schul- und Studienzeit in den Lehrberuf mitbringen. Oft herrscht noch der Eindruck vor: Je abstrakter die Beweisführung, desto hochwertiger die Argumentation. Die kommunikativen, modellierenden und argumentativen Prozesse, die im Vorfeld einer formalisierten Mathematik an der Tagesordnung sind, spielen in der Lehrerausbildung kaum eine Rolle. Mathematik wird – vor allem an Universitäten – noch immer primär vermittelt als eine fertige und abstrakt-logische Wissenschaft, die man dann beherrscht, wenn man in der Lage ist, mit den innermathematischen Formalismen sicher und überzeugend umzugehen. Nicht-formale Beweise oder Begründungen werden in der wissenschaftlichen Ausbildung eher als dilettantisch oder naiv abgetan.

Diese Ansicht entspricht allerdings nicht einem schülergemäßen Begründen und Argumentieren. Denn im schulischen Kontext ist das Argumentieren die Grundlage des Verstehens, das dadurch initiiert wird, immer wieder nach dem Warum zu fragen. Wenn man die Lernenden dazu ermutigen will – und das sollten wir wirklich tun, damit Mathematik nicht auf ein stupides Algorithmisieren reduziert wird –, benötigen diese das mathematische Rüstzeug, um darauf zu antworten. Wie dieses Rüstzeug aussehen kann, dazu macht diese Unterrichtseinheit Vorschläge.

Im Mathematikunterricht spielen nicht nur die formalen Beweise der Fachwissenschaft eine wichtige Rolle. Es ist vielmehr wichtig, die grundlegenden Denkprinzipien und Begründungsstrategien zu lernen und zu verstehen sowie unterschiedliche Argumentationsarten zu akzeptieren und zu fördern. Die Schüler sollen lernen, dass die Suche nach geeigneten grafischen Darstellungen (bildliche Argumentation), nach Beispielen und Gegenbeispielen oder nach passenden Situationen (kontextorientierte Argumentation) sowie die Verwendung von Variablen (algebraische Argumentation) hilfreiche Argumentationsstrategien sind. Dazu müssen diese Beweisformen aber regelmäßig im Unterricht vorkommen und es muss über die Aussagekraft und die dahinterstehenden Prinzipien reflektiert werden.

Auf einen Blick

Inner- versus außermathematisches Argumentieren

Material	Thema	Stunde
M 1 (Sw-Fo)	**Warm-up – was heißt „begründen" eigentlich?** Einstieg mit Beispielen für das Begründen im Alltag und in der Mathematik	1.

Möglichkeiten und Grenzen des Begründens mit Beispielen

Material	Thema	Stunde
M 2 (Ab)	**Aussagen bestätigen oder widerlegen** Mithilfe von Beispielen Aussagen bestätigen oder widerlegen	2.
M 3 (Ab)	**Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel** Vermutungen beweisen / widerlegen; Aussagen auf ihre Allgemeingültigkeit überprüfen	3.
M 4 (Ab)	**Wo steckt der Fehler? – Ergebnisse überprüfen** In Rechnungen Fehler finden; Klammern ausmultiplizieren	4.

Ikonisches und algebraisches Begründen

Material	Thema	Stunde
M 5 (Ab)	**Wie kann ich mir das vorstellen? – Variablen und Terme veranschaulichen** Variable durch Streckenlängen veranschaulichen	5.
M 6 (Ab)	**Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren** Das Produkt aus zwei Termen als Rechteck veranschaulichen	
M 7 (Ab)	**Gar nicht so schwierig! – Die 1. binomische Formel grafisch begründen** Sich die 1. binomische Formel grafisch veranschaulichen	6.
M 8 (Ab)	**Für alle Zahlen gleichzeitig – mit Variablen begründen** Einfache mathematische Beweise nachvollziehen	7.
M 9 (Ab)	**Mach dich fit! – Begründen mit Variablen und Termen** Aussagen mathematisch begründen mit Variablen und Termen	8.

Die Beweisstrategien festigen und Zusatzmaterial

Material	Thema	Stunde
M 10 (LEK)	**Teste dich selbst!** Den Lernerfolg überprüfen	9.
M 11/M 12 (Ab)	**Das merk ich mir! – Mein Memoblatt 1 und 2** Die Merkregeln übersichtlich auf den Memoblättern fest-halten	

M 1 Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich?

Wir brauchen stichhaltige Beweise!

Ich konnte ihn vom Gegenteil überzeugen.

Beweis mir das erst mal!

Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind!

Was bedeuten die Zitate? Worum geht es hier?

Im Zweifel für den Angeklagten!

Was meint ihr zu dieser Aussage? Ist sie richtig oder falsch?

Smartphones auf dem Vormarsch:

Immer mehr Deutsche nutzen mittlerweile Smartphones als Kombination aus Handy und Internet. Nach einer Studie von STATISTA besitzt aktuell bereits jeder zweite Deutsche ein Smartphone.

Welche Gleichung passt zur Zeitungsmeldung? Warum?

a) $D + S = 2$ b) $2 \cdot S = D$ c) $D - 2 = S$ d) $D = \frac{1}{2}S$

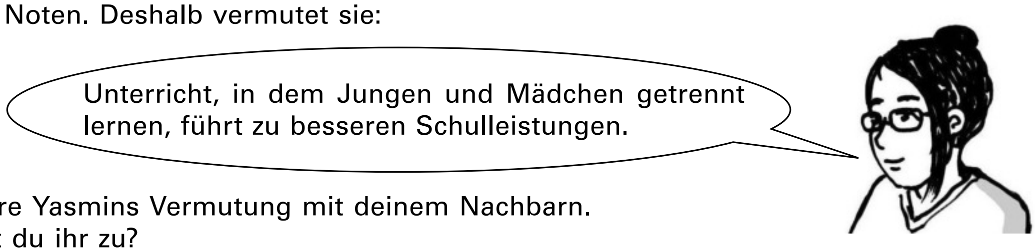
Bilder: 1–3: Thinkstock; 4. colourbox

M 3 Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel

Beispiele helfen beim Begründen. Aber nicht immer reichen sie aus.

Aufgabe 1

Yasmin hat im letzten Schuljahr auf eine Mädchenschule gewechselt und hat seitdem bessere Noten. Deshalb vermutet sie:

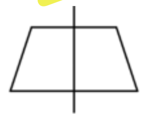


Diskutiere Yasmins Vermutung mit deinem Nachbarn.
Stimmst du ihr zu?

Aufgabe 2

Welche Vermutungen sind richtig? Welche sind falsch?

Welche Begründungen überzeugen dich? Welche nicht? Achte auf die Formulierungen.

Vermutung	Richtig? Falsch?	Begründung/Beweis
a) Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer durch 2 teilbar.		$133 + 109 = 242$ $242 : 2 = 121$
b) Ein Trapez hat genau eine Symmetrieachse.		
c) Beim Kürzen von Brüchen streicht man im Zähler und Nenner gleiche Ziffern weg.		$\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ (0 wegstreichen) $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ (6 wegstreichen) $\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$ (9 wegstreichen)
d) Wenn man in den Term $(a - b)^2 - (a + b)^2$ konkrete Zahlen einsetzt, kommt immer eine Quadratzahl heraus.		$(1 - 0)^2 - (1 + 0)^2 = 1 - 1 = 0 = 0^2$ → Null ist die Quadratzahl von Null.
e) Egal, welche Zahlen man für a und b einsetzt, der Term $(a - b)^2$ hat immer ein positives Ergebnis.		$a = -10$; $b = 65$ $(-10 - 65)^2 = 5625$

Aufgabe 3 – mein Memoblatt

Je nach Formulierung sollen Aussagen allgemein – also immer – gelten oder nur für einen Einzelfall. In der Mathematik ist man besonders an allgemeingültigen Aussagen interessiert.

Erkläre, warum man allgemeingültige Aussagen nicht mit einem Beispiel begründen kann und warum man sie durch ein Gegenbeispiel widerlegen kann. Übertrage deine Erkenntnisse auf dein Memoblatt 1.

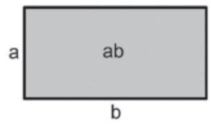
M 6 Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren

Du kannst dir Terme als Streckenlängen vorstellen. Was bedeutet es aber geometrisch, wenn du zwei Terme multiplizierst?

Aufgabe 1

$a \cdot b$ ist das Produkt aus den beiden Seitenlängen eines Rechtecks.

ab steht also für den Flächeninhalt des Rechtecks.



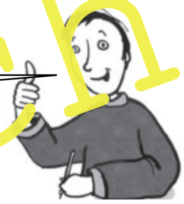
a) Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck mit den Seitenlängen 2x und 3y?

Tipp Mache dir eine Skizze und zerlege die beiden Seiten des Rechtecks in sinnvolle Teilstücke. Dann kannst du anschließend durch Hilfslinien auch den Gesamtflächeninhalt des Rechtecks in kleinere Teilrechtecke zerlegen.

b) Begründe mit einer geeigneten Zeichnung (Rechteck) ähnlich wie in a), dass diese Berechnungen richtig sind:

(1) $4s \cdot t = 4st$ (2) $5k \cdot 5m = 25km$ (3) $6a \cdot 2a = 12a^2$

a steht in einer Aufgabe immer für dieselbe Streckenlänge.



I/F

Aufgabe 2

a) Kilian macht immer wieder diese Fehler: $b \cdot b = 2b$ und $b + b = b^2$

Erkläre ihm mit einer Zeichnung, was er sich jeweils vorstellen kann, um diese Fehler zu vermeiden.

b) Lea hat Folgendes gerechnet: $3ab + 2ab = 6ab$

Begründe mithilfe von Rechtecken, warum diese Rechnung falsch ist.

Aufgabe 3

Zeichne für die folgenden Terme jeweils ein Rechteck ins Heft, sodass man den Term am Rechteck ablesen kann. Ordne die Terme dazu in Gruppen. Welche Terme sind ähnlich?

Tipp Kannst du manchmal etwas ausklammern?

a) $10 \cdot (5 + 8)$ b) $3 \cdot 5 + 3 \cdot 8$ c) $z \cdot (x + y)$

d) $cd + ef$ e) $2 \cdot (2 + 3 + 4)$ f) $(a + b + c) \cdot d$

Für Schnelle: Gib dir eigene Terme vor und stelle diese durch geeignete Rechtecke dar. Lass sie anschließend von einem anderen Schnellen überprüfen.

Aufgabe 4 – mein Memoblatt

Du hast gelernt, was man sich unter Termen geometrisch vorstellen kann. Überlege mit deinem Nachbarn, wie ihr eure Erkenntnisse in das Memoblatt 2 eintragen könnt.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Warm-up – was heißt „begründen" eigentlich?

Inner- versus außermathematisches Begründen

Material **M 1** sensibilisiert die Lernenden für den Unterschied zwischen außermathematischem und innermathematischem Argumentieren. Die in der Mathematik übliche Kategorisierung in *richtig* und *falsch* funktioniert im Alltag nicht ohne Weiteres. **Außermathematische Argumentationsprozesse** sind oft geprägt von **Subjektivität**, und es gibt meist Aspekte, die dafür-, und Aspekte, die dagegensprechen. Dies arbeiten Sie in den Schritten 1–3 heraus. **Innermathematische Argumentationen** dagegen berufen sich auf **mathematische Gesetze**, **Verfahren** oder **Definitionen** und sind immer gültig. Sie hängen nicht von Meinungen oder Umständen ab (Schritt 4).

Schritt für Schritt – so setzen Sie das Material ein

Kopieren Sie das Material auf **Folie** und decken Sie die einzelnen Elemente nach und nach auf. Beispiellösungen zu den einzelnen Fragen finden Sie im Lösungsteil auf der folgenden Seite.

1. Decken Sie die **Zitate** auf. Die Lernenden erklären sie und erkennen, dass man beim Begründen und Beweisen möglichst so stichhaltige und nachvollziehbare Argumente vorbringen muss, dass sich andere Personen davon überzeugen lassen – sogar der größte Feind.
2. Sammeln Sie **Situationen aus dem Alltag**, in denen man Menschen überzeugen muss:

   Im Alltag müssen wir immer mal wieder andere Personen oder uns selbst von einer Idee oder Meinung überzeugen. Fallen euch Situationen ein?
3. Decken Sie den **Richtergrundsatz** auf:

   Was meint ihr zu diesem Grundsatz? Ist er richtig oder falsch? Kann man das eindeutig sagen? Was ist, wenn der Angeklagte tatsächlich a) schuldig oder b) unschuldig ist?

   Hier soll herausgearbeitet werden, dass man bei vielen Dingen im Alltag nicht eindeutig sagen kann, ob sie richtig oder falsch sind. Es kommt auf die Umstände oder die Sichtweise an.
4. Die **Zeitungsmeldung** erfordert nun eine innermathematische Argumentation. Richtig ist b), denn die Anzahl der Deutschen ist zweimal so hoch wie die Anzahl der Smartphones (weil ja nur jeder zweite Deutsche ein Smartphone besitzt). Fragen Sie die Lernenden zunächst, für was die Variablen D und S stehen könnten. Wichtig ist hier zu erkennen, dass D und S für die Anzahl der Deutschen bzw. Smartphones stehen. D ist also nicht *ein* Deutscher und S nicht *ein* Smartphone, sondern die Menge aller Deutschen bzw. Smartphones.
5. Nun sichern die Lernenden ihre Erkenntnisse auf dem **Memoblatt 1 (M 11)**. Fragen Sie:

a) Wann ist eine Begründung gut? Wann ist sie schlecht?

b) Worin unterscheiden sich mathematische Begründungen (siehe Zeitungsmeldung) von anderen?

Überlegt zu zweit und übertragt eure Erkenntnisse auf das Memoblatt 1.