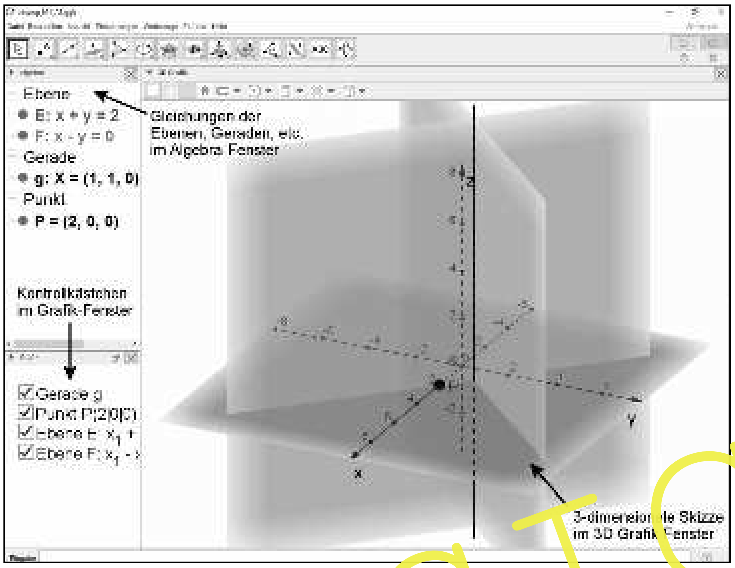
Wir machen uns fit in Analytischer Geometrie!

Walter Czech, Krumbach



Lösungsskizze zu Aufgabe 3b)

Klasse: 12

Dauer: 3–5 Stunden

Inhalt: Übungen zur Analytischen Geometrie:

Vektorbegriff, Rechnen mit Vektoren, Ortsvektoren, Geradengleichung, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatengleichung, Normalenform), Lagebeziehung Gerade–Gerade, Lagebeziehung Gerade–Ebene und Schrägbildzeichnungen

Ihr Plus:

✓ Abiturvorbereitung

✓ 3-dimensionale Skizzen zu allen Lösungen in GeoGebra

Zu den Lösungen aller Aufgaben finden Sie 3-dimensionale Skizzen auf der **CD-ROM 65**. Diese Skizzen können Sie in der „3D Grafik“-Ansicht von GeoGebra[1] von allen Seiten betrachten (vgl. Abbildung oben). Natürlich erscheinen die einzelnen Elemente, z. B. die beiden hier dargestellten Ebenen, in den originalen Dateien auf der CD in leuchtenden Farben. Zum Betrachten der Dateien benötigen Sie mindestens **GeoGebra 5.0**. Zeigen Sie Ihren Schülern die Dateien bei der Besprechung der Lösungen, und schulen Sie so deren räumliches Vorstellungsvermögen. Mithilfe von Kontrollkästchen in der „Grafik“-Ansicht (hier in der unteren linken Bildecke) können Sie nach und nach alle für die Lösung relevanten Elemente (Ebene, Gerade, etc.) einblenden.

Sie bereiten Ihre Schüler auf die Abiturprüfung vor? Und Sie haben das Gefühl, dass es da noch immer die eine oder andere Lücke im Wissensstand Ihrer Schüler gibt, die Lernenden den Stoff nicht sicher beherrschen und daher bei Übungsaufgaben immer wieder an denselben Klippen scheitern? Dieser Beitrag schafft Abhilfe!

[1] GeoGebra ist unter https://www.geogebra.org/ kostenlos zum Download erhältlich.

Didaktisch-methodische Hinweise

Ziel der Unterrichtsreihe:

Der Beitrag ist für die SEK. II vorgesehen. Insbesondere ist er gedacht für Schüler, die sich auf die **schriftliche Abiturprüfung** in Analytischer Geometrie vorbereiten.

Das Abitur beinhaltet auch Standardaufgaben. Ihre Schüler sollten Standardaufgaben als solche erkennen. Sie sollten wissen, mit welcher Methode diese zu lösen sind, und sie sollten die zugehörigen Rechenverfahren sicher beherrschen. Das ganze Lösungs- und Rechenschema muss sozusagen bei ihnen „einprogrammiert" sein. Es muss vom Anfang bis zum Ende automatisch ablaufen, ohne dass die Schüler lange nachzudenken brauchen. Nur so bleibt genügend Zeit, um schwierigere Aufgabenteile und Aufgaben ungewohnter Art bearbeiten zu können. Hier hilft nur üben, üben, üben. Mit der vorliegenden Aufgabensequenz wird das erfolgreich umgesetzt. Ein wichtiges Hilfsmittel sind Schrägbildzeichnungen. In Aufgabe 19 wird dies exemplarisch gefordert.

Vorkenntnisse: Vektorbegriff, Rechnen mit Vektoren, Ortsvektoren, Geradengleichung, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatengleichung, Normalenform), Lagebeziehung Gerade–Gerade, Lagebeziehung Gerade–Ebene und Schrägbildzeichnungen.

Ablauf:

Die Partnerarbeit wird mit einer Lernerfolgskontrolle abgeschlossen. Sie können sich überlegen, mit welchen dieser 21 Aufgaben Sie das tun wollen (Vorschlag: **Aufgaben 17, 20 und 21**). Von den restlichen Aufgaben machen Sie für jeden Ihrer Schüler eine Kopie. Sie teilen die Klasse in Zweiergruppen ein, teilen die Materialien **M 1** und **M 2** aus und ordnen diese 14 Aufgaben den Gruppen zu. Bei z. B. 28 Schülern in Ihrer Klasse bearbeitet jede Gruppe eine andere Aufgabe. Die Gruppen erstellen jeweils die zugehörigen Lösungen und präsentieren diese in der nächsten Stunde im Plenum. Danach werden **Musterlösungen** angefertigt und diese in Kopie an alle verteilt. Mit den vermischten Übungen (**M 3**) verfahren Sie analog. Zwischenzeitlich haben Ihre Schüler die Aufgaben ausgeschnitten und einzeln auf Karton geklebt. Auf der Rückseite der Kärtchen kann nun jeder Schüler mit eigener Hand die zugehörige Musterlösung aufschreiben. Damit hat jeder Schüler seine **Lernkartei** zu diesem Thema. In einer der folgenden Unterrichtsstunden erfolgt die (benotete) Lernerfolgskontrolle.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K 2, K 4, K 5	L 1, L 3	… bearbeiten Standardaufgaben, üben bestimmte Rechenverfahren, schließen eventuelle Lücken und gewinnen Sicherheit in Analytischer Geometrie.	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf beiliegender CD-ROM 65.

Auf einen Blick

Material	Thema
M 1	**Grundübungen: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$**
M 2	**Grundübungen: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ – Längen**
M 3	**Vermischte Übungen**

Minimalplan: Sie wählen einzelne Aufgaben aus und lassen nur diese bearbeiten.

M 1 Grundübungen: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Arbeiten Sie mit einem Partner zusammen.

Aufgabe 1

Vom Punkt P(1|3|2) soll das Lot auf die Ebene E: $x_2 - 3 = 0$ gefällt werden.

Stellen Sie eine Gleichung der Lotgeraden ℓ auf.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E_1: x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 auf, die parallel zu E_1 ist und den Punkt P(2|2|–1) enthält.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform auf, die die Gerade g enthält und durch den Punkt P(2|0|0) geht.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene F auf, die senkrecht zu E ist und die mit E die Gerade g gemein hat.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\quad k \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$E:\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

keine gemeinsamen Punkte haben.

Aufgabe 5: Zwei Geraden

a) Wann schneiden sich zwei Geraden im Raum?

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und h:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\quad k \in \mathbb{R}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$$

M 2 Grundübungen: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ – Längen

Arbeiten Sie mit einem Partner zusammen.

Aufgabe 10

Welche Punkte der Geraden g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

haben von der Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ den Abstand 2 LE?

Aufgabe 11

Die Geraden g und h sind windschief. Ermitteln Sie die Punkte P_1 und P_2 auf g, die von $A(10|0|0) \in h$ die Entfernung $10\sqrt{2}$ LE haben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R}$$

der Ebene $E: 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 52 = 0$ angehört.

Aufgabe 13

Gegeben sind die Punkte A(a|0|2), B(5|8|–2) und C(1|9|2).

Zeigen Sie, dass es für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ genau eine Ebene gibt, die die Punkte A, B und C enthält.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Punkte A(–2|1|1), B(–2|5|1) und C(–3,5|3|1).

a) Zeigen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E(A,B,C) in Normalen- und in Koordinatenform auf.

c) Zeigen Sie, dass der Fußpunkt F des Lotes von S(–8|3|6) auf der Ebene E ein Punkt der Symmetrieachse des Dreiecks ABC ist.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Grundübungen: Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

$$\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R}$$

Merke:

Ist $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ eine Koordinatengleichung der Ebene E, so ist der Vektor mit den Koordinaten a_1, a_2 und a_3 ein **Normalenvektor** von E. Hier speziell: $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = 1$, also ist

$\vec{n_0} = (0, 1, 0)^T$

der Richtungsvektor der Lotgeraden auf die Ebene E.

Aufgabe 2

$$E_2: \vec{n}_{E_1} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Also:

$$E_2: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x_1 - 2 + x_2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - 4 = 0$

Merke:

Eine Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{p}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}$ wird beschrieben durch die Gleichung

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ (Normalenform der Ebenengleichung).

Aufgabe 3

a)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]; \quad k, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Wir schreiben in Koordinatenform um:

(1) $\quad x_1 = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = x_1 - 1$

(2) $\quad x_2 = 1 - t$

(3) $\quad x_3 = k$

(1) in (2): $\quad x_2 = 1 - x_1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - 2 = 0$